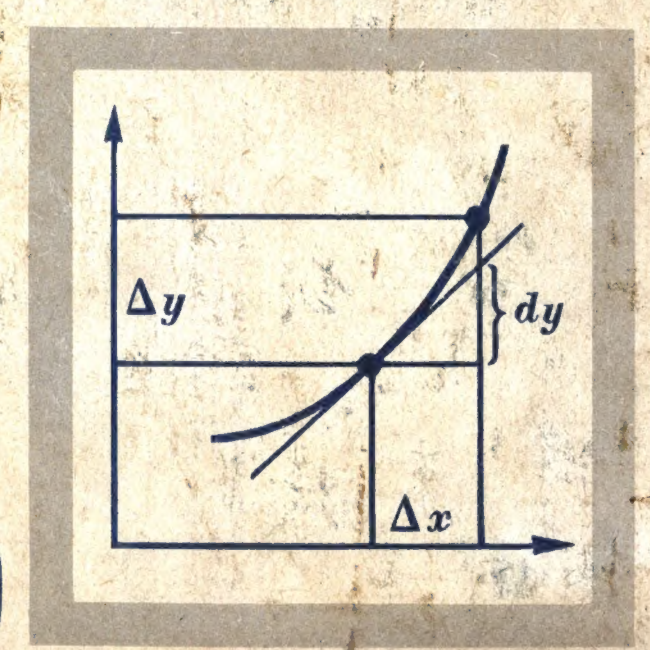
В.А. Кудрявцев
Б.П. Демидович

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ





В. А. КУДРЯВЦЕВ
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов естественных специальностей университетов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1 9 8 9

ББК 22.11
К88
УДК 51(075.8)

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. **Краткий курс высшей математики**: Учебное пособие для вузов.— 7-е изд., испр.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 656 с.—ISBN 5-02-013927-0.

Содержит четкое и ясное изложение курса высшей математики в объеме 250—300 часов. Наличие большого количества примеров помогает усвоению теоретического материала.

Для студентов естественных (геологического, географического, биологического и почвенного) факультетов университетов.

6-е изд. вышло в 1986 г.
Ил. 278.

Рецензент
член-корреспондент АН СССР профессор Л. Д. Кудрявцев.

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Всеволод Александрович,
ДЕМИДОВИЧ Борис Павлович

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Заведующий редакцией **Н. А. Угарова**
Редактор **Ф. И. Кизнер**
Художественный редактор **Т. Н. Кольченко**
Технический редактор **Е. В. Морозова**
Корректор **М. Н. Дронова**

ИБ № 32765

Сдано в набор 08.08.88. Подписано к печати 26.04.89. Формат 84 x 108 1/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 34,44. Усл. кр.-отт. 34,65. Уч.-изд. л. 35,16. Тираж 140 000 экз. (2-й завод 1—70 000). Заказ № 3258. Цена 1 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано в типографии издательства «Коммуна», г. Воронеж, пр. Революции, 39

К $\frac{1602070000-079}{053(02)-89}$ 47-89

ISBN 5-02-013927-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода в свет последнего издания книги «Краткий курс высшей математики» прошло более 10 лет. За этот период в преподавании высшей математики на естественных факультетах университетов наметился ряд новых тенденций, нашедших свое отражение в программах общего курса высшей математики. Перечислим важнейшие из них:

а) В связи с развитием машинной техники вычислений значительно возрос интерес к численным методам решения задач.

б) Повысилась роль линейной алгебры. Аналитическая геометрия во многих случаях рассматривается как геометрическая иллюстрация соответствующих алгебраических конструкций.

в) Для приложений ощущается потребность в векторной алгебре.

г) Не вызывает дискуссий, что естественник должен иметь понятие о гармоническом анализе.

д) Необходимо дать студентам понятие о численных методах решений дифференциальных уравнений. Кроме того, должно быть дано представление об уравнениях математической физики.

е) Для некоторых специальностей требуется первоначальное знакомство с элементами теории вероятностей.

Настоящее издание книги представляет переработку ее в указанном выше направлении с целью модернизации курса высшей математики.

Добавлен значительный новый материал: однако объем книги за счет изъятия части старого материала мало изменился.

Сохранена общая установка книги: служить учебным пособием по высшей математике для студентов естественных факультетов (геологического, географического, биологического и почвенного) с небольшим общим курсом высшей математики (порядка 250—300 часов). Книга

приспособлена к действующим программам основных специальностей факультетов.

Укажем наиболее существенные изменения и дополнения книги.

В главе I «Прямоугольная система координат на плоскости» сразу введен параллельный перенос системы координат, благодаря чему формула расстояния между двумя точками может быть доказана в полной общности. Здесь же рассматривается общий случай преобразования прямоугольной системы координат.

В главе II «Уравнение линии» дается понятие об алгебре множеств.

В главе III «Прямая линия» изъято нормальное уравнение прямой. Задача о расстоянии от точки до прямой решается непосредственно. Материал главы значительно сокращен.

В главе IV «Линии второго порядка» дается понятие об алгебраической классификации кривых второго порядка.

Глава VI «Функция» пополнена понятием о линейном и квадратичном интерполировании.

Существенно переработана глава VII «Теория пределов». В основу положено окрестностное определение предела функции. Добавлен параграф «Понятие об асимптотических формулах».

В главе VIII «Непрерывность функции» приведена классификация точек разрыва функции. Дается понятие о кусочно непрерывных и кусочно гладких функциях.

В главе IX «Производная» вводится понятие бесконечной производной. Приводятся определения гиперболических функций.

Глава X «Основные теоремы о производных» написана более экономно.

Глава XI «Приложения производной» пополнена формулой Тейлора. Дается аналитическое доказательство стандартных достаточных условий выпуклости графика функции. Излагаются метод хорд и метод касательных для приближенного решения уравнений.

В главе XIV «Определенный интеграл», как это было сделано в первом издании книги, определенный интеграл рассматривается как соответствующее приращение первообразной подынтегральной функции. В курсе математического анализа с небольшим количеством часов такое определение определенного интеграла, по моему мнению, является более доходчивым для студентов и сразу вводит их в курс его приложений. Фактическое же нахождение

интегральной суммы, для среднего студента, представляет трудную задачу; это понятие вводится позднее. В этой главе, кроме формулы трапеций, излагается квадратурная формула Симпсона. Более подробно рассмотрены несобственные интегралы.

В основу главы XV «Приложения определенного интеграла» положен «метод дифференциала». Разобраны некоторые новые задачи.

Глава XVI «Комплексные числа» содержит основные сведения об алгебре комплексных чисел и их геометрическом изображении.

Новая глава XVII «Определители второго и третьего порядков» излагает соответствующую теорию. Показывается применение определителей для решения систем линейных уравнений (правило Крамера). Дается понятие о методе Гаусса для решения систем линейных уравнений.

Полностью новая глава XVIII «Элементы векторной алгебры» содержит традиционный материал. Вводится понятие прямоугольной декартовой системы координат в пространстве. Координаты точки пространства определяются как проекции ее радиуса-вектора на оси координат; это сразу решает вопрос о знаках координат.

С учетом векторной точки зрения, существенно переработана глава XIX «Некоторые сведения из аналитической геометрии в пространстве».

В главе XX «Функции нескольких переменных» введены понятия скалярного и векторного полей, а также градиента скалярного поля. Дается понятие абсолютного экстремума функции и приводится формулировка теоремы Вейерштрасса.

В главе XXI «Ряды» добавлен параграф «Тригонометрические ряды Фурье».

В главу XXII «Дифференциальные уравнения» введен параграф «Метод Эйлера». Кроме того, включен материал, связанный с дифференциальными уравнениями математической физики.

Глава XXIII «Криволинейные интегралы» изложена более сжато.

В главе XXIV «Двойные и тройные интегралы» часть материала изъята.

Новая глава XXV «Основы теории вероятностей» содержит элементы теории вероятностей.

В последней, XXVI главе дается понятие о линейном программировании.

Как и в прежнем издании книги, часть теорем излагается без доказательств, со ссылками на более полные курсы математического анализа. В основном указаны книги: Сахарников Н. А. Высшая математика.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1973 и Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I.— М.: Наука, 1973.

Приношу глубокую благодарность проф. Л. Д. Кудрявцеву, обстоятельная рецензия которого на рукопись книги позволила улучшить ее содержание.

Считаю своим долгом отметить, что редактор книги профессор Л. А. Тумаркин, ныне скончавшийся, произвел тщательное редактирование текста, как по существу, так и по форме. Его многочленные существенные замечания были учтены при окончательном варианте рукописи.

Выражаю искреннюю признательность доценту И. П. Цареградскому, который внимательно прочел главу рукописи «Основы теории вероятностей» и внес соответствующие коррективы.

Жаворонки, 1975 г. *Б. П. Демидович*

ВВЕДЕНИЕ

Согласно определению Энгельса «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» (Анти-Дюринг). Сообразно этому математика, в общих чертах, делится на Геометрию и Анализ.

Возникновение математики относится к глубокой древности. Первый период ее получил название «*Элементарной математики*». Ее особенности: а) неподвижность рассматриваемых объектов; б) неиспользование идеи бесконечности; в) отсутствие общих методов.

Бурное развитие производства, техники и естествознания в XVII и XVIII веках потребовало создания математического аппарата, пригодного к изучению переменных величин, находящихся в функциональной зависимости между собой. Возникла новая, так называемая *высшая математика* с ее разветвлениями: *аналитической геометрией*, *дифференциальным и интегральным исчислениями*, *теорией дифференциальных уравнений* и др.

В аналитической геометрии был дан общий метод решения геометрических задач (*метод координат*). Созданные в дифференциальном и интегральном исчислениях новые мощные понятия: *бесконечно малая величина*, *производная*, *интеграл*, *бесконечный ряд* и т. д.— не только позволили математикам с легкостью справиться со знаменитыми задачами древности: о касательной, площади, объеме тел и др., но и дали средства для решения более трудных задач, недоступных ранее математике. С помощью дифференциальных уравнений успешно преодолевались актуальные для того времени задачи, выдвигающиеся механикой, физикой и техникой.

Приведем краткие сведения из истории развития высшей математики.

Основы аналитической геометрии были даны математиком и философом Декартом (1596—1650). Открытие дифференциального и интегрального исчислений принад-

лежит Ньютону (1642—1727) и Лейбницу (1646—1716); хотя не следует забывать, что идеи нового исчисления были заложены в работах многочисленных их предшественников[1]). Выдающуюся роль в создании классического математического анализа сыграли Эйлер (1707—1783), Лагранж (1736—1813), Гаусс (1777—1855), Коши (1789—1857), Вейерштрасс (1815—1897) и др.

Не имея возможности полностью осветить роль ученых России в развитии высшей математики, ограничимся лишь указанием наиболее важных вкладов, внесенных отечественными математиками, отсылая за подробностями к специальным сочинениям[2]).

Великому математику, петербургскому академику Эйлеру принадлежат фундаментальные результаты почти во всех областях математического знания и его приложений. Его работы сохраняют свое значение до наших дней.

Гениальный русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856) совершил настоящую революцию в геометрии, создав новую науку—«геометрию Лобачевского». Идеи Лобачевского были столь новы, что современники не поняли их и только сравнительно недавно его теория получила всеобщее признание и дальнейшее развитие. Лобачевскому принадлежат также некоторые основоположные результаты в области анализа.

Выдающийся академик М. В. Остроградский (1801—1861) вывел важное соотношение в теории «кратных интегралов», находящее широкие применения в приложениях.

Знаменитый русский ученый П. Л. Чебышев (1821—1894), в связи со своими замечательными работами по «теории механизмов», создал новый раздел математики: «Теорию наилучшего приближения функций», усиленно разрабатывающуюся в настоящее время. Ему принадлежат также классические результаты во многих других областях математики: «теории вероятностей», «теории чисел», «интегральном исчислении». Он первый добился крупных успехов в решении труднейшей проблемы «о рас-

---

[1]) См. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I.— М.: Наука, 1968, гл. XIV (Исторический очерк возникновения основных идей математического анализа).

[2]) Делоне Б. Н. Математика и ее развитие в России.— М.: Правда, 1948; Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России.— М.: Гостехиздат, 1946.

пределении простых чисел», которая свыше 2000 лет не поддавалась никаким усилиям.

Чебышев является основателем одной из сильнейших математических школ в мире — петербургской математической школы, блестящими представителями которой были А. А. Марков, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, А. Н. Крылов и др.

Известный русский математик С. В. Ковалевская (1850—1891) получила первоклассные результаты в теории дифференциальных уравнений и теоретической механике.

Советские математики принимают самое деятельное участие в развитии науки. Благодаря наличию в СССР большого количества выдающихся ученых во всех областях современной математики, группирующих вокруг себя коллективы активно работающих учеников и последователей, достижения советских математиков находятся на уровне передовой математической мысли.

Наш «Краткий курс» ставит своей целью изложение основных понятий высшей математики и их приложений в различных областях. В настоящее время высшая математика служит теоретическим фундаментом большинства технических и естественно-научных дисциплин. Овладение ее методами и умение применять их на практике насущно необходимы для каждого естествоиспытателя.

ГЛАВА I

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПРОСТЕЙШИМ ЗАДАЧАМ

§ 1. Прямоугольные координаты точки на плоскости

Координатами точки на плоскости называются числа, определяющие положение этой точки на плоскости.

Прямоугольные декартовы координаты (по имени математика Декарта) на плоскости вводятся следующим образом на этой плоскости выбирается точка O (*начало координат*) и проходящие через нее взаимно перпендикулярные направленные прямые Ox и Oy (*оси координат*) (рис. 1). Для удобства рассмотрения будем предполагать, что ось Ox (*ось абсцисс*) горизонтальна и направлена слева направо, а ось Oy (*ось ординат*) вертикальна и направлена снизу вверх; таким образом, ось Oy повернута относительно оси Ox на угол 90° против хода часовой стрелки[1]). Кроме того, выбирается единица масштаба для измерения расстояний.

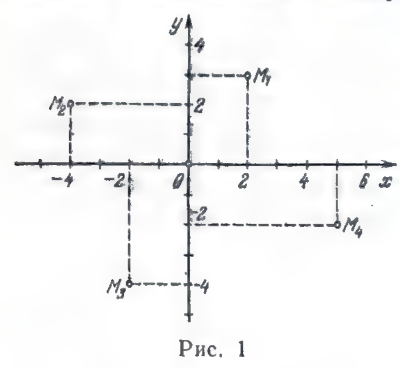


Рис. 1

Для данной точки M введем в рассмотрение два числа: *абсциссу* x и *ординату* y этой точки.

Абсциссой x называется число, выражающее в некотором масштабе расстояние от точки до оси ординат, взятое со знаком плюс, если точка лежит вправо от оси ординат, и со знаком минус, если точка лежит влево от оси ординат.

Ординатой y называется число, выражающее в некотором масштабе (обыкновенно в том же, как и для абсциссы)

[1]) Вообще говоря, расположение осей и выбор их положительного и отрицательного направлений являются произвольными.

расстояние от точки до оси абсцисс, взятое со знаком плюс, если точка лежит выше оси абсцисс, и со знаком минус, если точка лежит ниже оси абсцисс.

Эти два числа x и y и принимаются за **координаты** точки M, так как они полностью определяют положение точки на плоскости, а именно: *каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка, координатами которой являются эти числа; и обратно, каждая точка плоскости имеет определенные координаты x и y.* Если точка M имеет координаты x и y, то это обстоятельство обозначают так: $M(x, y)$ (на первом месте ставится абсцисса x, а на втором — ордината y). При записи координат знак плюс, как обычно, можно опускать.

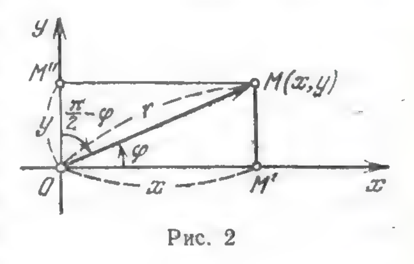


Рис. 2

Оси Ox и Oy разбивают плоскость на четыре части, называемые *квадрантами*. Производя нумерацию квадрантов (I, II, III и IV) в направлении против хода часовой стрелки, отправляясь от того квадранта, где обе координаты положительны, получим следующую таблицу знаков координат:

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Отрезок OM, соединяющий начало координат O с точкой M (рис. 2), называется ее *радиусом-вектором*. Обозначая через φ угол, образованный отрезком OM с положительным направлением оси Ox, и через r его длину, для точки M, лежащей в I квадранте, из треугольников OMM' и OMM'' получим

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (1) будут справедливы для координат точек всех квадрантов. Таким образом,

знак абсциссы x точки M совпадает со знаком косинуса, а знак ее ординаты y — со знаком синуса в соответствующем квадранте.

Легко видеть, что если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината y равна нулю; если же она лежит на оси ординат, ее абсцисса x равна нулю, и обратно. Следовательно, если точка совпадает с началом координат, то равны нулю обе ее координаты.

Пример. Точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ и $M_4(x_4, y_4)$ на рис. 1 имеют координаты $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; $x_3 = -2$, $y_3 = -4$; $x_4 = 5$, $y_4 = -2$.

В дальнейшем прямоугольные декартовы координаты для краткости мы будем называть просто **прямоугольными координатами**.

В следующих параграфах рассмотрим некоторые простейшие задачи на применение прямоугольных координат на плоскости.

§ 2. Преобразование прямоугольной системы координат

При решении задач иногда выгодно, вместо данной прямоугольной системы координат Oxy, выбрать другую прямоугольную систему координат $O'x'y'$, определенным образом ориентированную относительно первой. Например, при межпланетных путешествиях можно пользоваться системой координат, связанной с центром Земли (геоцентрическая система координат); однако более удобно использовать систему координат, связанную с центром Солнца (гелиоцентрическая система координат).

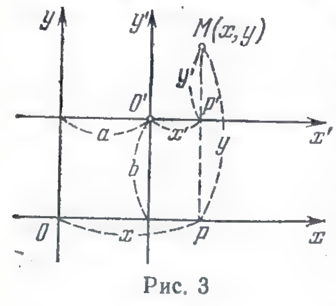


Рис. 3

Возникает вопрос о переходе от одной системы координат к другой.

Мы рассмотрим сначала простейший случай (рис. 3), когда оси «новой системы координат» $O'x'y'$ параллельны соответствующим осям «старой системы координат» Oxy и имеют одинаковые направления с ними (*параллельный перенос системы координат*).

Пусть начало новой системы координат точка O' имеет координаты (a, b) в старой системе координат. Точка M плоскости со «старыми координатами» (x, y) будет иметь некоторые «новые координаты» $[x', y']$ (для ясности мы их обозначаем квадратными скобками). Из рис. 3 непосредственно получаем

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad (1)$$

т. е. *новые координаты точки равны ее старым координатам минус старые координаты нового начала.*

Обратно, из (1) находим

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \quad (2)$$

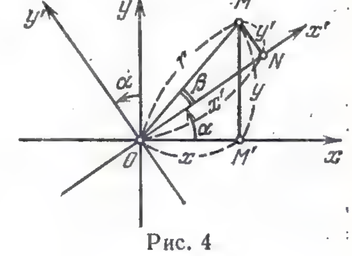


Рис. 4

Пусть теперь «новая система» координат $Ox'y'$, при неизменном начале O, повернута относительно «старой системы» Oxy на угол α (рис. 4), т. е. $\angle x'Ox = \alpha$, причем α считается положительным, если поворот осуществляется против хода часовой стрелки, и отрицательным — в противоположном случае (*поворот системы координат*).

Обозначим через β угол, образованный радиусом-вектором $r = OM$ точки M с осью Ox'; тогда отрезок OM, с учетом знака угла β[1]), будет составлять с осью Ox угол $\alpha + \beta$. Отсюда на основании формул (1) из § 1 при любом расположении точки M имеем

$$x = r\cos(\alpha + \beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta \quad (3)$$

и

$$y = r\sin(\alpha + \beta) = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

Так как новые координаты точки M, очевидно, есть

$$x' = r\cos\beta, \qquad y' = r\sin\beta, \quad (5)$$

то из формул (3) и (4) получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Для запоминания формул (6) используют следующий мнемонический прием: говорят, что первая формула (6)

---

[1]) Здесь угол β считается положительным, если радиус-вектор OM повернут относительно оси Ox' против хода часовой стрелки, и отрицательным, если он повернут относительно этой оси по ходу часовой стрелки.

содержит полный беспорядок, а вторая — полный порядок. Действительно, в первой формуле на первом месте стоит cos, на втором — sin; кроме того, присутствует знак минус. Во второй формуле (6) никаких нарушений правильности в этом смысле нет.

Формулы (6) выражают старые координаты x и y точки M через ее новые x' и y'. Чтобы выразить новые координаты x' и y' через старые x и y, достаточно разрешить систему (6) относительно x' и y'. Однако можно поступить проще: а именно, принять систему $Ox'y'$ за «старую», а систему Oxy за «новую». Тогда, учитывая, что вторая система повернута относительно первой на угол $-\alpha$, заменяя в формулах (6) x' и y' соответственно на x и y и обратно и принимая во внимание, что $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, будем иметь

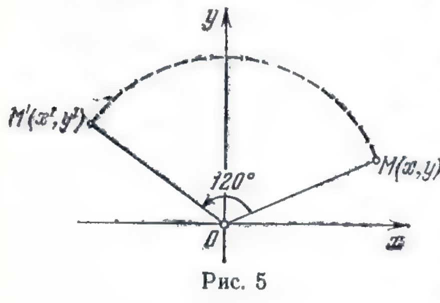


Рис. 5

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Наконец, в общем случае, когда новое начало координат есть точка $O'(a, b)$ и ось $O'x'$ образует с осью Ox угол α, соединяя формулы (2) и (6), находим

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Аналогично, из формул (1) и (7) получаем

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Из формул (8) и (9) вытекает, что формулы перехода от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат являются **линейными функциями** как новых, так и старых координат, т. е. содержат эти координаты в первой степени.

Пример. Отрезок OM, где точка M имеет координаты (x, y), повернут на угол $\alpha=120°$ против хода часовой стрелки (рис. 5). Каковы будут координаты x' и y' нового положения M' точки M?

Предполагая, что с точкой M связана подвижная система координат $Ox'y'$, на основании формул (6) будем иметь

$$x' = x\cos 120^\circ - y\sin 120^\circ = -\left(x + y\sqrt{3}\right)/2,$$
$$y' = x\sin 120^\circ + y\cos 120^\circ = \left(x\sqrt{3} - y\right)/2.$$

§ 3. Расстояние между двумя точками на плоскости

1) Найдем сначала расстояние r от начала координат $O(0,\ 0)$ до точки $M(x,\ y)$ (рис. 6).

Расстояние $r = OM$, очевидно, является гипотенузой прямоугольного $\triangle OMM'$ с катетами $OM' = |x|$ и $M'M = |y|$.

По теореме Пифагора получаем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Таким образом, *расстояние от начала координат до некоторой точки равно корню квадратному из суммы квадратов координат этой точки.*

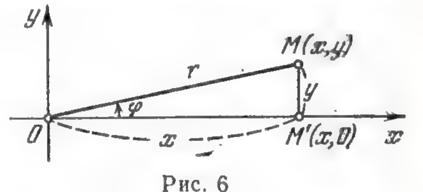


Рис. 6

2) В общем случае, пусть для точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (рис. 7) требуется найти расстояние $d = AB$ между этими точками.

Рис. 7

Выберем новую систему координат $Ax'y'$, начало которой совпадает с точкой A и оси которой параллельны прежним осям и имеют, соответственно, одинаковые направления с ними. Тогда в новой системе координат точки A и B будут иметь координаты (§ 2) $A[0,\ 0]$ и $B[x_2 - x_1,\ y_2 - y_1]$. Отсюда на основании формулы (1) получаем

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{2}$$

т. е. *расстояние между двумя точками плоскости* (при любом их расположении) *равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.*

Замечание. Формула (2) дает также длину отрезка AB. Легко определить направление этого отрезка. Из прямоугольного $\triangle ABC$ имеем

$$d_x = d\cos\alpha = x_2 - x_1, \quad d_y = d\sin\alpha = y_2 - y_1 \tag{3}$$

(d_x и d_y называются **проекциями** отрезка AB на оси координат Oxy). Отсюда получаем

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d},\quad \sin\alpha=\frac{y_2-y_1}{d},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

где d определяется формулой (2).

Пример. Танк на местности переместился из точки $A(-30, 80)$ в точку $B(50, 20)$ (относительно некоторой системы координат Oxy), причем координаты точек даны в километрах. Найти путь d, пройденный танком, если он двигался, не меняя направления.

Применяя формулу (2), имеем

$$d=\sqrt{(50+30)^2+(20-80)^2}=\sqrt{6400+3600}=100 \text{ (км)}.$$

§ 4. Деление отрезка в данном отношении

Предположим, что отрезок AB (рис. 8), соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, разделен точкой C на два отрезка AC и CB, причем отношение AC к CB равно $l\ (l \geqslant 0)$:

$$\frac{AC}{CB}=l. \qquad (1)$$

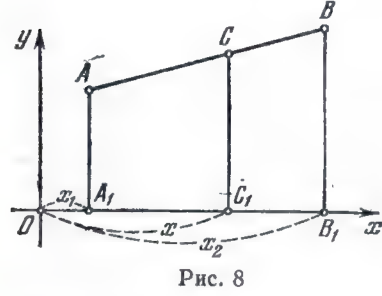


Рис. 8

Требуется выразить координаты x и y точки $C(x, y)$ через координаты концов отрезка AB.

Опустим перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно из точек A, B и C на ось Ox. Тогда получим, что три параллельные прямые A_1A, C_1C, B_1B пересекают стороны угла (не обозначенного на рисунке), образованного прямыми AB и Ox. Как известно из элементарной геометрии, пучок параллельных прямых рассекает стороны угла на пропорциональные части; поэтому

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB},$$

откуда на основании равенства (1) будем иметь

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=l. \qquad (2)$$

Из рис. 8 видно, что $A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1$, $C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x$. Подставляя эти выражения в формулу (2), получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=l.$$

Решая уравнение (3) относительно неизвестной абсциссы x, будем иметь

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1+l};$$

аналогично,

$$y = \frac{y_1 + ly_2}{1+l}.$$

Итак, координаты точки $C(x, y)$, делящей отрезок AB в отношении l (считая от A к B), определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1+l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1+l}. \tag{4}$$

Если точка C делит отрезок AB пополам, то $AC = CB$ и, следовательно, $l = AC/CB = 1$. Обозначая координаты середины отрезка AB через $\bar{x}$, $\bar{y}$, получим на основании формул (4)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{5}$$

т. е. *координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов.*

Примечание. При выводе формул (4) и (5) мы предполагали, что концы A и B отрезка AB лежат в первом квадранте, и, следовательно, координаты точек A и B положительны. Легко доказать, что формулы (4) и (5) будут справедливы и в случае произвольного расположения отрезка AB на координатной плоскости.

Пример. Вычислить координаты точки $C(x, y)$, делящей отрезок AB между точками $A(-5, -3)$ и $B(4, -6)$ в отношении $AC/CB = 3/2$.

В этом случае $l = 3/2$ и, следовательно:

$$x = \frac{-5 + \frac{3}{2}\cdot 4}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{-3 + \frac{3}{2}\cdot(-6)}{1 + \frac{3}{2}} = -4\frac{4}{5}.$$

§ 5. Площадь треугольника

Пусть требуется найти площадь S треугольника ABC (рис. 9) с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Пусть $AB = c$, $AC = b$, а углы, образованные этими сторонами с осью Ox, соответственно равны α и β.

На основании § 3 (см. замечание) имеем (рис. 9)

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= c_x = c\cos\alpha = x_2 - x_1, \\ A''B'' &= c_y = c\sin\alpha = y_2 - y_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} A'C' = b_x = b\cos\beta = x_3 - x_1, \\ A''C'' = b_y = b\sin\beta = y_3 - y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Пусть $\varphi = \angle CAB$; очевидно (рис. 9), $\varphi = \beta - \alpha$. По известной формуле тригонометрии получаем

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\varphi = \frac{1}{2} bc \sin(\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} bc (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = \frac{1}{2}(b_y c_x - b_x c_y). \qquad (3)$$

Отсюда в силу (1) и (2) имеем

$$S = \frac{1}{2}[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \qquad (4)$$

Заметим, что формула (4) при ином расположении вершин может дать площадь треугольника S со знаком минус.

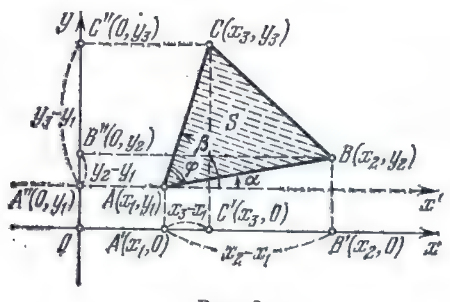


Рис. 9

Поэтому формулу для площади треугольника обычно пишут в виде

$$S = \pm \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)], \qquad (4')$$

где знак выбирается так, чтобы для площади получалось положительное число.

Используя понятие *определителя второго порядка*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

формулу (4′) можно записать в удобной для запоминания форме

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Формула (4′) упрощается, если точка $A(x_1, y_1)$ находится в начале координат. А именно, полагая $x_1=0$, $y_1=0$, получим

$$S=\pm\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2).$$

Отметим, что если точки A, B, C находятся на одной прямой, то площадь $S=0$; и обратно, если $S=0$, то вершины A, B и C расположены на одной прямой.

Пример. Колхозное поле имеет форму треугольника с вершинами $A(-2, -1)$, $B(3, 5)$ и $C(-1, 4)$ (размеры даны в километрах). Определить площадь S этого поля.

По формуле (5) имеем

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3+2 & -1+2\\ 5+1 & 4+1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(25-6)=9{,}5\ (\text{км}^2),$$

или $S=950$ га.

Замечание. Вычисление площади многоугольника сводится к вычислению площадей треугольников. Для этого достаточно разбить многоугольник на треугольники, площади которых вычисляют по формуле (4).

Упражнения

1. Построить точки: $A(2, 3)$, $B(-4, 1)$, $C(2, -3)$, $D(-2, -2)$, $E(-5, 0)$.

2. Определить координаты вершин равностороннего треугольника, лежащего в I квадранте, со стороной, равной 10, если одна из вершин его совпадает с началом координат O, а основание треугольника расположено на оси Ox.

3. Определить координаты точки $M(x, y)$, симметричной точке $A(1, 2)$ относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) биссектрисы I и III координатных углов; г) биссектрисы II и IV координатных углов.

4. Прямая MN параллельна оси ординат и находится от нее вправо на расстоянии 5 единиц. Найти координаты точки A_1, симметричной точке $A(2, 4)$ относительно прямой MN, и координаты точки B_1, симметричной точке $B(-1, 3)$ относительно той же прямой MN.

5. На оси Ox найти точку, расстояние от которой до точки $A(3, 4)$ равно 5.

6. Отрезок AB, где $A(2, 5)$ и $B(4, 8)$, делится точкой C в отношении 2:3. Найти координаты точки C.

7. Точка $C(2, 3)$ делит отрезок AB в отношении 1:2. Найти координаты точки B, если известно, что точка A имеет координаты $x=1$, $y=2$.

8. Вершины треугольника суть $A(-2, 0)$, $B(6, 6)$ и $C(1, -4)$. Найти длину биссектрисы, проведенной из вершины A.

9. В точках $A(-2, 1)$ и $B(7, 4)$ помещены соответственно $m_1=10$ г и $m_2=20$ г. Определить координаты центра масс этой системы.

10. Найти координаты центра масс N треугольника ABC с вершинами: $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(4, 3)$. (Центр масс треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, которая, как известно, делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.)

11. Отрезок между точками $A(x_0, y_0)$ и $B(x, y)$ разделен на n равных частей. Определить координаты x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ точек деления.

12. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-2, -2)$, $B(-1, 3)$ и $C(3, -1)$.

13. Показать, что точки $A(-7, -3)$, $B(-1, 1)$ и $C(2, 3)$ лежат на одной прямой.

14. Площадь треугольника ABC с вершинами $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$ и $C(4, y)$ равна 15. Определить ординату вершины C.

15. Лес имеет форму четырехугольника с вершинами A (0, 200), B (200, 100), C (500, 300) и D (100, 700) (координаты даны в метрах). Найти площадь леса.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

§ 1. Множества

Под *множеством* $X = \{x, x', x'', \ldots\}$ понимается собрание (совокупность) некоторых *элементов* $x, x', x'', \ldots$ Если x есть элемент множества X, то пишут $x \in X$ (читается: x принадлежит X); если y не является элементом множества X, то пишут $y \notin X$ (читается: y не принадлежит множеству X).

Пример 1. X — множество всех студентов в данной аудитории.

Пример 2. $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел.

Удобно ввести понятие пустого множества $\varnothing$, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. В частности, это освобождает нас от необходимости каждый раз доказывать существование хотя бы одного элемента данного множества.

Пример 3. Множество трехголовых людей пусто.

Множества X и X' считаются *равными*: $X = X'$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение 1. *Множество Y, состоящее из части элементов множества X или совпадающее с ним, называется подмножеством множества X; в этом случае пишут*

$$Y \subset X. \tag{1}$$

Условились считать, что пустое множество есть подмножество любого множества.

Если множества изображать «логическими фигурами», то соотношению (1) соответствует рис. 10.

Если под символом $\forall$ понимать «для любого», то соотношение (1) эквивалентно следующему:

$$\forall y \in Y \Rightarrow y \in X, \tag{1'}$$

где стрелка $\Rightarrow$ заменяет слово «следует».

Пример 4. Пусть X — множество всех студентов первого курса и Y — множество студенток первого курса. Очевидно, $Y \subset X$.

Если $Y \subset X$ и $X \subset Y$, то, очевидно, $X = Y$.

Определение 2. *Под объединением (суммой) двух множеств X и Y понимается множество $X \cup Y$*

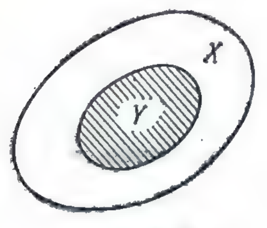


Рис. 10

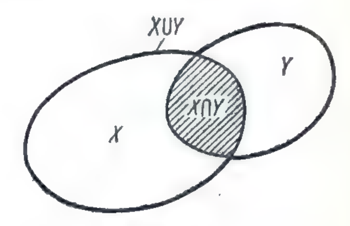


Рис. 11

($\cup$ — *знак объединения), состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т. е. входящих или в X или в Y, или в X и в Y одновременно* (рис. 11).

Аналогично определяется *объединение* бóльшего числа множеств. Так, под объединением $X \cup Y \cup Z$ трех множеств понимается множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X, Y, Z. Логически знак объединения множеств соответствует союзу «или» (соединительному):

Пример 5. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Определение 3. Под *пересечением (произведением) двух множеств X и Y понимается множество $X \cap Y$ ($\cap$ — знак пересечения), состоящее из всех элементов, принадлежащих как одному, так и другому множествам, т. е. входящих и в множество X и в множество Y (общая часть множеств)* (рис. 11).

Таким образом, знак пересечения множеств логически соответствует союзу «и». Если множества X и Y не имеют общих элементов, то их пересечение пусто:

$$X \cap Y = \varnothing.$$

Аналогично определяется *пересечение* бóльшего числа множеств. Так, под пересечением $X \cap Y \cap Z$ трех множеств понимается множество всех элементов, принадлежащих одновременно множествам X, Y и Z.

Пример 6. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

Определение 4. *Для множеств X и Y под их разностью $X \setminus Y$ понимается множество, содержащее все элементы множества X, не входящие в множество Y* (рис. 12).

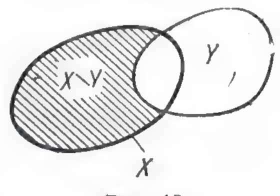


Рис. 12

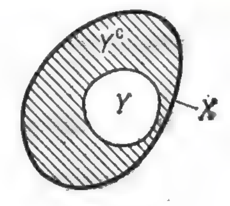


Рис. 13

Если $Y \subset X$, то множество $Y^c = X \setminus Y$ называется *дополнением* множества Y до множества X (рис. 13).

Очевидно, $Y \cup Y^c = X$, $Y \cap Y^c = \varnothing$.

Пример 7. $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$.

§ 2. Метод координат на плоскости

В главе I было показано, как, используя прямоугольные координаты, можно чисто алгебраически решать геометрические задачи.

Раздел математики, занимающийся изучением свойств геометрических фигур с помощью алгебры, носит название *аналитической геометрии*, а использование для этой цели координат называется *методом координат*.

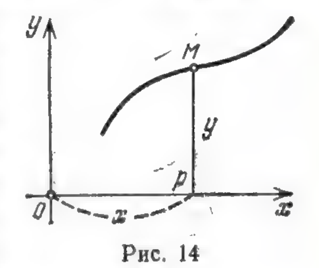


Рис. 14

Выше мы применили метод координат для решения ряда важных, но частных задач. Теперь мы приступим к систематическому изложению того, как в аналитической геометрии решается общая задача, состоящая в исследовании методами математического анализа формы, расположения и свойств данной линии.

Пусть мы имеем некоторую линию на плоскости (рис. 14). Координаты x и y точки, лежащей на этой линии, не могут быть вполне произвольными; они должны быть подчинены известным ограничениям, обусловленным геометрическими свойствами данной линии. Тот факт, что числа x и y являются координатами точки, лежащей на данной линии, аналитически записывается в виде некото-

рого уравнения. Это уравнение называется *уравнением линии на плоскости.*

Сущность метода координат на плоскости заключается в том, что всякой плоской линии сопоставляется ее уравнение[1]), а затем свойства этой линии изучаются путем аналитического исследования соответствующего уравнения.

§ 3. Линия как множество точек

Линия на плоскости обычно задается как *множество точек*, обладающих некоторыми геометрическими свойствами, исключительно им присущими.

Пример 1. Окружность радиуса R (рис. 15) есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой ее точки O (центр окружности).

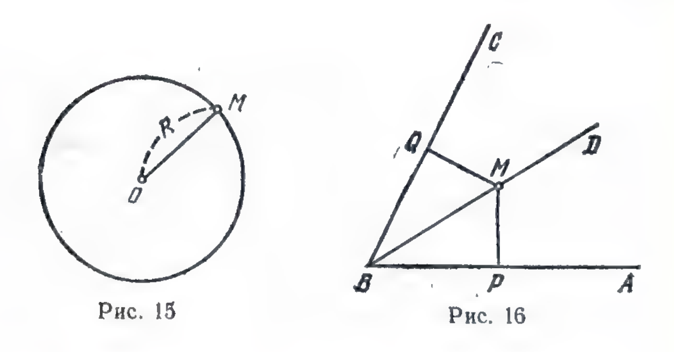


Рис. 15

Рис. 16

Иными словами, на окружности расположены те и только те точки, расстояние которых от центра окружности равно ее радиусу.

Пример 2. Биссектриса угла ABC (рис. 16) есть множество всех точек, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон.

Этим утверждается, что: 1) для каждой точки M, лежащей на биссектрисе BD, длины перпендикуляров MP и MQ, опущенных соответственно на стороны BA и BC угла, равны между собой: $MP = MQ$, и 2) всякая точка, находящаяся внутри угла ABC и не лежащая на его биссектрисе, будет ближе к одной стороне угла, чем к другой.

---

[1]) Точнее говоря, класс равносильных уравнений.

§ 4. Уравнение линии на плоскости

Сформулируем теперь точнее определение уравнения линии [1]) на плоскости.

Определение. *Уравнением линии (уравнением кривой) на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.*

Таким образом, для того чтобы установить, что данное уравнение является уравнением некоторой линии K, необходимо и достаточно: 1) доказать, что координаты любой точки, лежащей на линии K, удовлетворяют этому уравнению, и 2) доказать, обратно, что если координаты некоторой точки удовлетворяют этому уравнению, то точка обязательно лежит на линии K.

Отсюда уже автоматически будет следовать, что: 1′) если координаты какой-нибудь точки не удовлетворяют данному уравнению, то точка эта не лежит на линии K, и 2′) если точка не лежит на линии K, то ее координаты не удовлетворяют данному уравнению.

Если точка $M(x, y)$ передвигается по линии K, то ее координаты x и y, изменяясь, все время удовлетворяют уравнению этой кривой. Поэтому координаты точки $M(x, y)$ называются *текущими координатами* точки линии K.

На плоскости Oxy текущие координаты точки M данной кривой K обычно обозначаются через x и y, причем первая из них есть абсцисса точки M, а вторая — ее ордината. Однако, если это целесообразно, текущие координаты точки M можно обозначать любыми буквами, например, $M(X, Y)$, или $M(\xi, \eta)$ и т. п. Так, например, уравнения

$$y = 2x \quad \text{и} \quad Y = 2X,$$

где точки $N(x, y)$ и $N(X, Y)$ расположены на плоскости Oxy, представляют собой уравнение одной и той же прямой на этой плоскости.

Основное понятие аналитической геометрии — уравнение линии — поясним на ряде примеров.

Пример 1. Составить уравнение окружности данного радиуса R с центром в начале координат.

---

[1]) Линию мы часто будем называть *кривой* независимо от того, прямолинейна она или не прямолинейна.

Возьмем на окружности (рис. 17) произвольную точку $M(x, y)$ и соединим ее с центром O. По определению окружности имеем $OM=R$, т. е. $\sqrt{x^2+y^2}=R$, откуда

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (1)$$

Уравнение (1) связывает между собой координаты x и y каждой точки данной окружности. Обратно, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1), то, очевидно, $OM=R$ и, следовательно, эта точка лежит на нашей окружности. Таким образом, уравнение (1) представляет собой уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

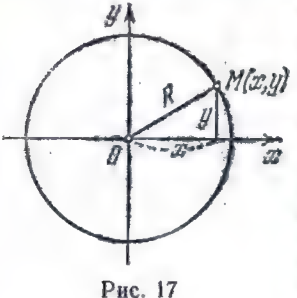


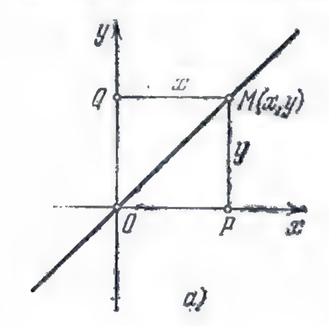
Рис. 17

Пример 2. Составить уравнения биссектрис координатных углов.

Рассмотрим сначала биссектрису I и III координатных углов (рис. 18, *а*). Возьмем на ней произвольную точку $M(x, y)$. Если точка M лежит в первом квадранте, то абсцисса и ордината ее обе положительны и равны между собой (по свойству биссектрисы). Если же точка $M(x, y)$ лежит в III квадранте, то абсцисса и ордината будут обе отрицательны, а модули их равны; поэтому будут равны и координаты x и y этой точки. Следовательно, в обоих случаях имеем

$$y=x. \qquad (2)$$

Обратно, если координаты x и y какой-нибудь точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (2), то эта точка, очевидно, лежит на



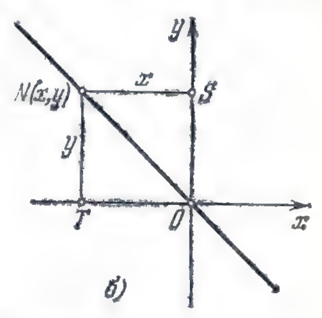


Рис. 18

биссектрисе I и III координатных углов. Поэтому уравнение (2) представляет собой уравнение биссектрисы I и III координатных углов.

Рассмотрим теперь биссектрису II и IV координатных углов (рис. 18, *б*). Возьмем на ней произвольную точку $N(x, y)$. В каком бы квадранте — II или IV — ни была расположена эта точка, координаты ее x и y равны по модулю и отличаются знаками.

Следовательно, в обоих случаях имеем

$$y = -x. \tag{3}$$

Обратно, если для какой-нибудь точки $N(x, y)$ выполнено уравнение (3), то эта точка, очевидно, лежит на биссектрисе II и IV координатных углов. Таким образом, уравнение (3) есть уравнение биссектрисы II и IV координатных углов.

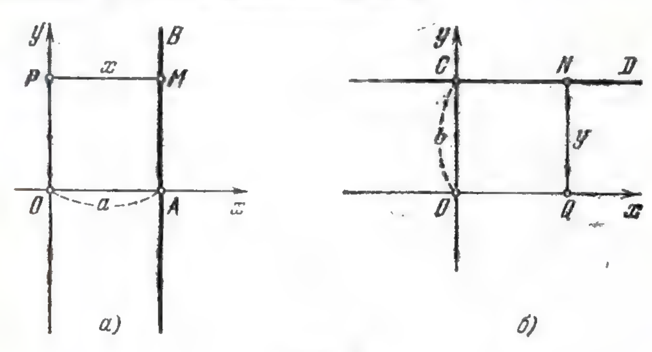


Рис. 19

Пример 3. Составить уравнение прямой, параллельной оси ординат.

Пусть прямая $AB \parallel Oy$, и пусть отрезок $OA = a$ (рис. 19, *а*). Тогда для любой точки $M(x, y)$ прямой AB ее абсцисса x равна a:

$$x = a. \tag{4}$$

Обратно, если абсцисса некоторой точки $M(x, y)$ равна a, то эта точка лежит на прямой AB.

Таким образом, уравнение (4) представляет собой уравнение прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от нее на расстоянии, равном численному значению a; при этом если прямая расположена справа от оси Oy, то a положительно; если же прямая расположена слева от оси Oy, то a отрицательно.

В частности, при $a = 0$ получаем уравнение оси ординат: $x = 0$.

Пример 4. Составить уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

Совершенно аналогично, если прямая $CD \parallel Ox$ и $OC = b$ (рис. 19, *б*), то ее уравнение будет

$$y = b;$$

при этом если прямая CD расположена выше оси Ox, то b положительно, если же прямая CD расположена ниже оси Ox, то b отрицательно.

В частности, при $b = 0$ получаем уравнение оси абсцисс: $y = 0$.

Пример 5. Найти линию, расстояние точек которой от точки $B(12, 16)$ в два раза больше, чем от точки $A(2, 4)$.

Если $M(x, y)$ — произвольная точка искомой линии, то согласно условию задачи имеем

$$2AM = BM. \tag{5}$$

Чтобы составить уравнение этой линии, надо выразить AM и BM через координаты x и y точки M. На основании формулы расстояния между двумя точками (гл. I, § 3) имеем

$$AM=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}, \quad BM=\sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2},$$

откуда согласно соотношению (5)

$$2\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}.$$

Это и есть уравнение искомой линии.

Но в таком виде трудно судить, какую линию представляет это уравнение, поэтому упростим его. Возведя обе части в квадрат и раскрыв скобки, получим

$$4x^2-24x+36+4y^2-32y+64=x^2-24x+144+y^2-32y+256,$$

или после несложных преобразований имеем равносильное уравнение

$$x^2+y^2=100.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), мы видим, что искомая линия является окружностью радиуса 10 с центром в начале координат.

§ 5. Построение линии по ее уравнению

Если переменные x и y связаны некоторым уравнением, то множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, представляет собой, вообще говоря, некоторую линию на плоскости (*«геометрический образ уравнения»*).

В частных случаях эта линия может вырождаться в одну или несколько точек. Возможны также случаи, когда уравнению не соответствует никакое множество точек.

Например, уравнению

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

соответствует единственная точка (1, 2), так как этому уравнению удовлетворяет единственная пара значений: $x=1$ и $y=2$.

Рис. 20

Уравнению

$$x^2+y^2=-1$$

не соответствует никакое множество точек, так как этому уравнению нельзя удовлетворить никакими действительными значениями x и y.

Зная уравнение линии, можно по точкам построить эту линию.

Пример. Построить линию, выражаемую уравнением

$$y = x^2 \tag{1}$$

(обычно говорят короче: построить линию $y = x^2$).

Давая абсциссе x в уравнении (1) числовые значения и вычисляя соответствующие значения ординаты y, получим следующую таблицу:

x	...	—3	—2	—1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Нанося соответствующие точки на плоскость, мы видим, что конфигурация этих точек определяет начертание некоторой линии; при этом чем гуще построена сеть точек, тем отчетливее выступает ее контур. Соединяя построенные точки линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек [1]), мы и получим линию, определяемую данным уравнением (1) (рис. 20). Эта линия называется *параболой*.

§ 6. Некоторые элементарные задачи

Если известно уравнение линии, то легко могут быть решены простейшие задачи, связанные с расположением этой линии на плоскости.

Задача 1. Заданы уравнение линии K и координаты точки $M(a, b)$. Определить, лежит ли точка M на линии K или нет?

Иными словами, требуется узнать, проходит ли линия K через точку M или не проходит.

На основании понятия уравнения линии получаем правило: *чтобы определить, лежит ли точка M на данной линии K, нужно в уравнение этой линии подставить координаты нашей точки. Если при этом уравнение удовлетворится* (т. е. в результате подстановки получится тождество), *то точка лежит на линии; в противном слу-*

---

[1]) Для того чтобы иметь возможность судить о положении промежуточных точек линии, мы должны предварительно изучить общие свойства уравнения этой линии (подробнее см. в гл. XI).

чае, если координаты точки не удовлетворяют уравнению линии, данная точка не лежит на линии.

В частном случае линия проходит через начало координат тогда и только тогда, когда уравнение линии удовлетворяется при $x=0$ и $y=0$.

Пример 1. Дана окружность

$$x^2+y^2=25. \qquad (1)$$

Определить, лежат ли на ней точки $M(-3,\ 4)$ и $N(4,\ -2)$.

Подставляя координаты точки M в уравнение (1), получаем тождество

$$(-3)^2+4^2=25.$$

Следовательно, точка M лежит на данной окружности.

Аналогично, подставляя координаты точки N в уравнение (1), будем иметь

$$4^2+(-2)^2\neq 25.$$

Следовательно, точка N не лежит на данной окружности.

Задача 2. Найти точку пересечения двух линий, заданных своими уравнениями.

Точка пересечения одновременно находится как на первой линии, так и на второй. Следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям обеих линий. Отсюда получаем правило: *чтобы найти координаты точки пересечения двух линий, достаточно совместно решить систему их уравнений.* Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

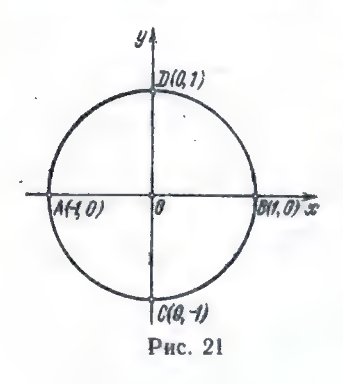


Рис. 21

Пример 2. Найти точки пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $y=4$.

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ y&=4, \end{aligned}\right\}$$

получаем две точки пересечения $A(-2,\ 4)$ и $B(2,\ 4)$.

Задача 3. Найти точки пересечения данной линии с осями координат.

Эта задача является частным случаем задачи 2.

Учитывая, что уравнение оси Ox есть $y=0$, получаем **правило:** *чтобы найти абсциссы точек пересечения данной линии с осью Ox, нужно в уравнении этой линии положить $y=0$ и решить полученное уравнение относительно x.*

Аналогично, так как уравнение оси Oy есть $x=0$, то получаем правило: *чтобы найти ординаты точек пересечения данной линии с осью Oy, нужно в уравнении этой линии положить $x=0$ и решить полученное уравнение относительно y.*

Пример 3. Найти точки пересечения окружности

$$x^2+y^2=1 \qquad (2)$$

с осями координат.

Полагая $y=0$ в уравнении (2), получаем $x^2=1$, т. е. $x_1=-1$ и $x_2=1$. Отсюда находим две точки пересечения данной окружности с осью Ox (рис. 21): $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$.

Аналогично, полагая $x=0$ в уравнении (2), получаем $y^2=1$, т. е. $y_1=-1$ и $y_2=1$. Следовательно, имеются две точки пересечения данной окружности с осью Oy (рис. 21): $C(0, -1)$ и $D(0, 1)$.

§ 7. Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости

Резюмируя содержание этой главы, можно сказать, что всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение между текущими координатами (x, y) точки этой линии. Наоборот, всякому уравнению между x и y, где x и y — координаты точки на плоскости, соответствует, вообще говоря, некоторая линия, свойства которой вполне определяются данным уравнением.

Отсюда, естественно, возникают две основные задачи аналитической геометрии на плоскости.

1) *Дана линия, рассматриваемая как множество точек. Составить уравнение этой линии.*

2) *Дано уравнение некоторой линии. Изучить по этому уравнению ее геометрические свойства (форму и расположение).*

§ 8. Алгебраические линии

Определение. *Линия называется линией (или кривой) n-го порядка ($n=1, 2, \ldots$), если она определяется уравнением n-й степени относительно текущих прямоугольных координат.*

Такие линии называются алгебраическими. Например, линии

$$x+y-1=0, \quad x^2+y^2=1, \quad x^3+y^3-3xy=0$$

являются кривыми соответственно первого, второго и третьего порядка.

Общий вид кривых первого порядка есть

$$Ax+By+C=0,$$

где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно, т. е. $A^2+B^2\neq 0$. Как будет доказано ниже (см. гл. III), все кривые первого порядка — прямые линии.

Общий вид кривых второго порядка следующий:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

где коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно, т. е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Заметим, что не всякому уравнению второго порядка соответствует действительная кривая. Например, уравнению $x^2+2xy+y^2+1=0$ не отвечает никакая кривая на плоскости Oxy, так как, очевидно, нет действительных чисел x и y, удовлетворяющих этому уравнению.

В следующих главах мы подробно изучим кривую первого порядка (прямую линию) и рассмотрим важнейшие представители кривых второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола).

Уравнение кривой n-го порядка может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{\substack{p,\ q=0\\ p+q\leqslant n}}^{n} a_{pq}x^p y^q=0, \tag{1}$$

где хотя бы один из старших коэффициентов a_{pq}, т. е. таких, что $p+q=n$, отличен от нуля ($\sum$ — знак суммирования).

Отметим важное свойство: *порядок кривой* (1) *не зависит от выбора прямоугольной системы координат.*

Действительно, выбирая другую систему прямоугольных координат $O'x'y'$, на основании формул перехода (§ 2) имеем

$$\left.\begin{aligned} x&=a_1x'+b_1y'+c_1,\\ y&=a_2x'+b_2y'+c_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где a_i, b_i, c_i $(i=1,\ 2)$ — некоторые постоянные коэффициенты.

Отсюда уравнение кривой (1) в новых координатах $O'x'y'$ будет иметь вид

$$\sum_{\substack{p',\ q'=0\\ p'+q'\leqslant n'}}^{n'} a'_{p'q'}x'_{p'}y'_{q'}=0, \tag{3}$$

где n' — порядок преобразованной кривой. Очевидно, что $n'\leqslant n$.

Аналогично, исходя из уравнения (3) и совершая обратный переход от координат x', y' к координатам x, y, получим уравнение (1), в котором $n\leqslant n'$. Следовательно, $n'=n$.

Упражнения

1. Составить уравнение линии, точки которой отстоят от оси Ox в два раза дальше, чем от оси Oy.

2. Составить уравнение линии, точки которой равноотстоят от двух данных точек: $A(2, 1)$ и $B(-3, 0)$.

3. Какую кривую описывает центр тяжести треугольника ABC с двумя неподвижными вершинами $A(6, 0)$ и $B(-6, 0)$, если третья вершина $C(x_3, y_3)$ описывает окружность $x_3^2+y_3^2=36$?

4. Какие геометрические образы соответствуют уравнениям: а) $xy=0$; б) $x^2+y^2=0$; в) $x^2-1=0$; г) $y^2-3y+2=0$; д) $x^2-xy=0$?

5. По точкам построить кривые, заданные уравнениями: а) $y=2-x$; б) $y=2x-x^2$; в) $y=\pm\sqrt{100-x^2}$; г) $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{100-x^2}$.

6. Указать, какие из данных точек $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, -1)$, $D(-1, -1)$, $E(1, 2)$ лежат на кривой $y=x^2$ и какие не лежат на ней.

7. Найти точки пересечения кривой $y=2+x-x^2$ с осями координат.

8. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=8$ и прямой $x-y=0$.

ГЛАВА III
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. Уравнение прямой

Пусть PQ — некоторая прямая на плоскости Oxy (рис. 22). Через произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ этой прямой (условно называемую «начальной точкой») проведем прямую M_0x', параллельную оси Ox и имеющую с ней одинаковое направление. Тогда наименьший неотрицательный угол $\varphi = \angle QM_0x'$ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, образованный полупрямой M_0Q, лежащей выше оси M_0x' или совпадающей с ней, с осью M_0x', называется *углом* между данной прямой и осью Ox.

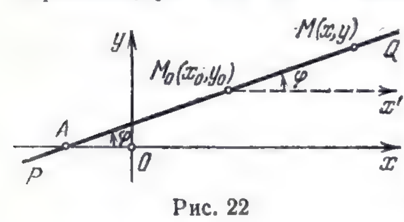


Рис. 22

Очевидно, этот угол не зависит от выбора точки M_0. Если прямая PQ пересекает ось Ox в некоторой точке $A(a, 0)$, то φ есть обычный угол между направленными прямыми. Если $PQ \parallel Ox$, то, очевидно, $\varphi = 0$. Начальная точка M_0 прямой и угол φ («направление прямой») однозначно определяют положение этой прямой на плоскости.

1) Пусть сначала $0 \leqslant \varphi < \pi/2$. Тогда прямая PQ пересекает ось Oy в некоторой точке $B(0, b)$, которую можно принять за начальную.

Ордината $y = NM$ текущей точки $M(x, y)$ прямой (рис. 23) состоит из двух частей:

$$y = NC + CM, \tag{1}$$

из которых первая постоянна, а вторая переменна. Введя угловой коэффициент $\operatorname{tg} \varphi = k$, из рис. 23 будем иметь

$$NC = b \text{ и } CM = BC \operatorname{tg} \varphi = kx \tag{2}$$

при $x \geqslant 0$.

Таким образом,

$$y = b + kx \tag{3}$$

при $x \geqslant 0$.

Нетрудно проверить, что формула (3) остается справедливой также и при $x < 0$.

Мы доказали, что координаты любой точки $M(x, y)$ прямой PQ удовлетворяют уравнению (3). Легко убедиться в обратном: если координаты какой-нибудь точки $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют уравнению (3), то точка M_1 обязательно лежит на прямой PQ. Следовательно, уравнение (3) представляет собой уравнение прямой линии PQ (так называемое *уравнение прямой с угловым коэффициентом*). Постоянные величины b и k (*параметры*) имеют следующие значения: $b = OB$ — *начальный отрезок* (точнее, *начальная ордината*) и $k = \operatorname{tg} \varphi$ — *угловой коэффициент*. Заметим, что если точка B расположена выше оси Ox, то $b > 0$, а если ниже, то $b < 0$. При $b = 0$ прямая проходит через начало координат и уравнение такой прямой есть

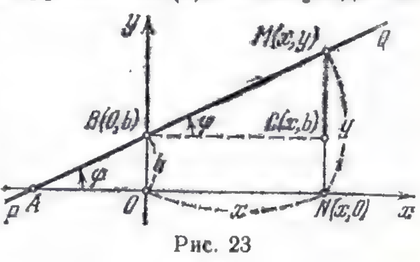


Рис. 23

$$y = kx. \tag{4}$$

При $k = 0$ получаем уравнение прямой, параллельной оси Ox:

$$y = b.$$

2) Если $\pi/2 < \varphi < \pi$, то с помощью аналогичных рассуждений мы также приходим к уравнению (3).

3) Если $\varphi = \pi/2$, т. е. прямая AB перпендикулярна оси Ox, то ее уравнение есть (см. гл. II)

$$x = a, \tag{5}$$

где a — абсцисса следа этой прямой на оси Ox (т. е. ее точки пересечения с осью Ox).

Замечание. Как частные случаи, получаем уравнения осей координат:

$$y = 0 \text{ (ось } Ox) \text{ и } \quad x = 0 \text{ (ось } Oy). \tag{6}$$

Прямую легко построить по ее уравнению.

Пример. Построить прямую, заданную уравнением

$$y=\frac{3}{2}x-4.$$

Известно, что две точки вполне определяют положение прямой. Поэтому достаточно найти две точки, через которые проходит наша прямая. В данном уравнении $b=-4$. Следовательно, прямая проходит через точку $B(0, -4)$. С другой стороны, координаты x и y любой точки, лежащей на нашей прямой, связаны заданным уравнением. Поэтому, задав абсциссу некоторой точки, лежащей на прямой, мы из уравнения прямой найдем ее ординату. Положим, например, $x=2$; из уравнения прямой получим $y=-1$. Таким образом, наша прямая проходит через точки $A(2, -1)$ и $B(0, -4)$. Построив эти точки по их координатам и проведя через них прямую (рис. 24), мы получим искомую прямую.

Из предыдущего видно, что для произвольной прямой на плоскости можно составить ее уравнение; обратно, зная уравнение некоторой прямой, можно построить эту прямую. Таким образом, уравнение прямой полностью характеризует положение ее на плоскости.

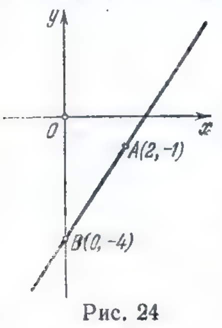


Рис. 24

Из формул (3) и (5) видно, что уравнение прямой есть уравнение **первой степени** относительно текущих координат x и y. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Всякое невырожденное уравнение первой степени*

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \tag{7}$$

представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости Oxy (общее уравнение прямой линии).

Доказательство. 1) Пусть сначала $B\neq 0$. Тогда уравнение (7) можно представить в виде

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}. \tag{8}$$

Сравнивая с (3), мы получим, что это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=-A/B$ и начальной ординатой $b=-C/B$.

2) Пусть теперь $B=0$; тогда $A\neq 0$. Имеем $Ax+C=0$ и

$$x=-C/A. \tag{9}$$

Уравнение (9) представляет собой уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $a=-C/A$.

Так как все возможные случаи исчерпаны, то теорема доказана.

§ 2. Угол между двумя прямыми

Рассмотрим две прямые (не параллельные оси Oy), заданные их уравнениями с угловыми коэффициентами (рис. 25):

$$y = kx + b, \text{ где } k = \operatorname{tg} \varphi, \tag{1}$$

и

$$y = k'x + b', \text{ где } k' = \operatorname{tg} \varphi'. \tag{2}$$

Требуется определить угол θ между ними. Точнее, под углом θ мы будем понимать наименьший угол, отсчитываемый против хода часовой стрелки, на который вторая прямая повернута относительно первой ($0 \leqslant \theta < \pi$). Этот угол θ (рис. 25) равен углу ACB треугольника ABC. Далее, из элементарной геометрии известно, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Поэтому $\varphi' = \varphi + \theta$, или

$$\theta = \varphi' - \varphi;$$

отсюда на основании известной формулы тригонометрии получаем

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi'}.$$

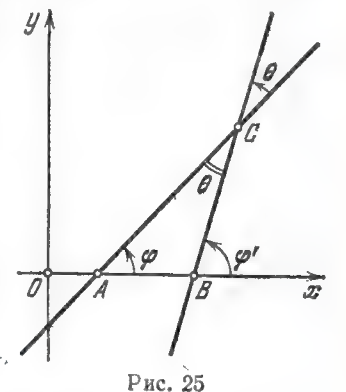


Рис. 25

Заменяя $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{tg} \varphi'$ соответственно на k и k', окончательно будем иметь

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k' - k}{1 + kk'}. \tag{3}$$

Формула (3) дает выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых.

Выведем теперь условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Если прямые (1) и (2) параллельны, то $\varphi' = \varphi$ и, следовательно,

$$k' = k. \tag{4}$$

Обратно, если выполнено условие (4), то, учитывая, что φ' и φ заключаются в пределах от 0 до π, получаем

$$\varphi' = \varphi, \tag{5}$$

и, следовательно, рассматриваемые прямые или параллельны, или сливаются (параллельность в широком смысле).

Правило 1. *Прямые на плоскости параллельны (в широком смысле) тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой.*

Если прямые перпендикулярны, то $\theta=\pi/2$ и, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{1+kk'}{k'-k}=0;$$

отсюда $1+kk'=0$ и

$$k'=-1/k. \tag{6}$$

Справедливо также и обратное утверждение.

Правило 2. *Две прямые на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку*[1].

Пусть теперь уравнения прямых заданы в общем виде:

$$Ax+By+C=0 \tag{7}$$

и

$$A'x+B'y+C'=0. \tag{8}$$

Отсюда, предполагая, что $B\neq 0$ и $B'\neq 0$, получаем

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \tag{7'}$$

и

$$y=-\frac{A'}{B'}x-\frac{C'}{B'}. \tag{8'}$$

Следовательно, угловые коэффициенты этих прямых есть

$$k=-\frac{A}{B},\quad k'=-\frac{A'}{B'}. \tag{9}$$

Из формулы (3), производя несложные выкладки, находим тангенс угла между этими прямыми:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{AB'-A'B}{AA'+BB'}. \tag{10}$$

Отсюда получаем: 1) **условие параллельности** прямых ($\theta=0$)

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B} \tag{11}$$

---

[1]) Для прямых, параллельных осям Ox и Oy, условно полагают $1/0=\infty$ и $1/\infty=0$.

и 2) **условие перпендикулярности** прямых ($\theta=\pi/2$)

$$AA'+BB'=0. \qquad (12)$$

Отметим, в частности, что прямые

$$Ax+By+C=0 \text{ и } Bx-Ay+C_1=0$$

взаимно перпендикулярны.

Пример. Определить угол между прямыми $y=x$ и $y=1,001x+10$.

Здесь угловые коэффициенты прямых есть: $k=1$ и $k'=1,001$. По формуле (3) получаем

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1,001-1}{1+1\cdot 1,001}=\frac{0,001}{2,001}\approx 0,0005=\frac{1}{2000}.$$

Так как для малых углов θ справедливо приближенное равенство $\theta\approx\operatorname{tg}\theta$, то

$$\theta\approx\frac{1}{2000}\text{ рад}\approx\frac{1}{2000}\cdot 57^\circ 18'=\frac{3438'}{2000}\approx 1,7'.$$

§ 3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая PM образует угол φ с положительным направлением оси Ox (рис. 26) и проходит через заданную точку $P(x_1,\ y_1)$. Выведем уравнение этой прямой, предполагая сначала, что прямая не параллельна оси Oy.

В этом случае, как мы видели, уравнение прямой имеет вид

$$y=kx+b, \qquad (1)$$

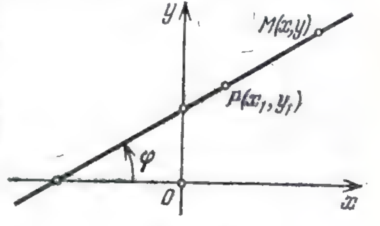


Рис. 26

где $k=\operatorname{tg}\varphi$ — угловой коэффициент прямой, а b — длина отрезка, отсекаемого нашей прямой на оси Oy. Так как точка $P(x_1,\ y_1)$ лежит на прямой PM, то ее координаты x_1 и y_1 должны удовлетворять уравнению (1), т. е.

$$y_1=kx_1+b. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (3)$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Если прямая, проходящая через точку $P(x_1, y_1)$, параллельна оси Oy, то ее уравнение, очевидно, будет

$$x = x_1. \tag{4}$$

Если k — заданное число, то уравнение (3) представляет вполне определенную прямую. Если же k — переменный параметр, то это уравнение определит *пучок прямых*, проходящих через точку $P(x_1, y_1)$ (рис. 27); при этом k называется *параметром пучка*.

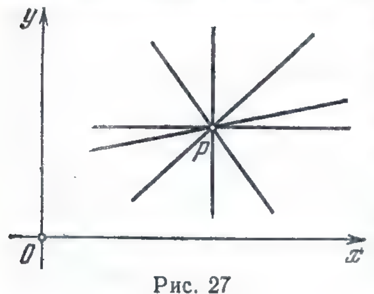


Рис. 27

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(3, 2)$, и параллельной прямой:

$$y = \frac{4}{3}x - 7.$$

Так как искомая прямая параллельна данной прямой, то ее угловой коэффициент $k = 4/3$. Следовательно, на основании формулы (3) уравнение этой прямой имеет вид $y - 2 = \frac{4}{3}(x - 3)$, или

$$y = \frac{4}{3}x - 2.$$

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(4, 5)$ и перпендикулярной к прямой:

$$y = -\frac{2}{3}x + 7.$$

Так как искомая прямая перпендикулярна прямой с угловым коэффициентом $k = -2/3$, то ее угловой коэффициент $k' = -1/k = 3/2$. Следовательно, на основании формулы (3) уравнение этой прямой таково: $y - 5 = \frac{3}{2}(x - 4)$, или окончательно

$$y = \frac{3}{2}x - 1.$$

§ 4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Известно, что через две не совпадающие между собой точки можно провести прямую, и притом только одну. Отыщем уравнение прямой, проходящей через точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$.

Предположим сначала, что $x_1 \neq x_2$, т. е. прямая PQ не параллельна оси Oy. Поскольку прямая PQ проходит

через точку $P(x_1, y_1)$, то ее уравнение имеет вид (см. § 3)

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{1}$$

где k — неизвестный нам угловой коэффициент этой прямой. Однако, так как наша прямая проходит также через точку $Q(x_2, y_2)$, то координаты x_2 и y_2 этой последней точки должны удовлетворять уравнению (1). Отсюда

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1)$$

и, следовательно, при $x_2 \neq x_1$ имеем

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) для углового коэффициента k в уравнение (1), получим уравнение прямой PQ:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{3}$$

Это уравнение при $y_1 \neq y_2$ можно записать также в виде пропорции

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{3'}$$

Если $x_1=x_2$, т. е. прямая, проходящая через точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$, параллельна оси Oy, то уравнение этой прямой, очевидно, будет

$$x=x_1.$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $P(4, -2)$ и $Q(3, -1)$.

На основании уравнения (3) имеем

$$\frac{x-4}{3-4}=\frac{y+2}{-1+2}, \quad \text{или } y=-x+2.$$

§ 5. Уравнение прямой в «отрезках»

Выведем теперь уравнение прямой, положение которой на плоскости задано ненулевыми отрезками, отсекаемыми ею на осях координат. Предположим, например, что прямая AB отсекает на оси Ox отрезок $OA=a$, а на оси Oy — отрезок $OB=b$ (рис. 28), причем ясно, что тем самым положение прямой вполне определено.

Для вывода уравнения прямой AB заметим, что эта прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$; поэтому уравнение ее легко получается из уравнения (3′) (см. § 4),

если положить в нем $x_1=a$, $y_1=0$ и $x_2=0$, $y_2=b$. Имеем

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}.$$

Отсюда

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

и окончательно

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

Это и есть так называемое *уравнение прямой в «отрезках»*. Здесь x и y, как обычно,— координаты произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на прямой AB (рис. 28).

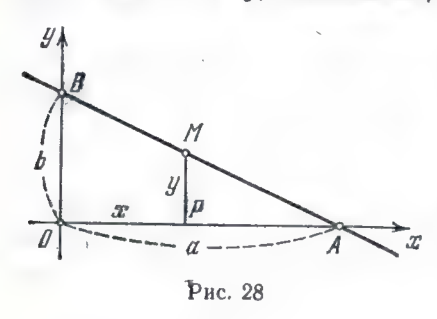


Рис. 28

Пример. Написать уравнение прямой AB, отсекающей на оси Ox отрезок $OA=5$, а на оси Oy отрезок $OB=-4$.

Полагая в уравнении (1) $a=5$ и $b=-4$, получим

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1, \text{ или}$$

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1.$$

Примечание. Уравнение прямой, проходящей через начало координат или параллельной одной из осей координат, не может быть записано как уравнение прямой в «отрезках».

§ 6. Точка пересечения двух прямых

Пусть имеем две прямые

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

и

$$A'x+B'y+C'=0. \qquad (2)$$

Точка пересечения этих прямых лежит как на первой прямой, так и на второй. Поэтому координаты точки пересечения должны удовлетворять как уравнению первой, так и уравнению второй прямой. Следовательно, *для того чтобы найти координаты точки пересечения двух данных прямых, достаточно решить совместно систему уравнений этих прямых*.

Последовательно исключая из уравнений (1) и (2) неизвестные y и x, будем иметь

$$(AB'-A'B)x+(CB'-C'B)=0 \qquad (3)$$

и

$$(AB'-A'B)\,y+(AC'-A'C)=0. \qquad (4)$$

Отсюда, если $AB'-A'B\neq 0$, то для координат точки пересечения прямых получаем такие выражения:

$$x=-\frac{CB'-C'B}{AB'-A'B},\quad y=-\frac{AC'-A'C}{AB'-A'B}, \qquad (5)$$

или, введя определители второго порядка (см. гл. I, § 5), имеем

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}},\quad y=-\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

Для прямых (1) и (2) возможны следующие три случая.

1) $AB'-A'B\neq 0$, т. е.

$$\frac{A'}{A}\neq\frac{B'}{B}.$$

На основании § 2 прямые не параллельны. Координаты их единственной точки пересечения определяются из формул (6).

2) $AB'-A'B=0$, $CB'-C'B\neq 0$ или $AC'-A'C\neq 0$, т. е.

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}\neq\frac{C'}{C}.$$

Прямые параллельны (см. § 2) и точки пересечения нет. Аналитически это видно из того, что по меньшей мере одно из уравнений (3) или (4) противоречиво и, значит, система (1) и (2) несовместна.

3) $AB'-A'B=0$, $CB'-C'B=0$, $AC'-A'C=0$, т. е.

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}.$$

Прямые (1) и (2) сливаются, и таким образом, существует бесчисленное множество точек пересечения. В этом случае левые части уравнений (1) и (2) отличаются только на постоянный множитель и, следовательно, система этих уравнений допускает бесконечно много решений.

Пример. Решая совместно систему уравнений прямых

$$3x+4y-10=0,$$
$$2x+5y-9=0,$$

получаем $x=2$ и $y=1$. Следовательно, эти прямые пересекаются в точке $N(2,\ 1)$.

§ 7. Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим прямую KL, заданную общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

и некоторую точку $M(x_1, y_1)$. Под расстоянием от точки M до прямой KL понимается длина перпендикуляра $d = MN$ ($MN \perp KL$), опущенного из точки M на прямую KL (рис. 29).

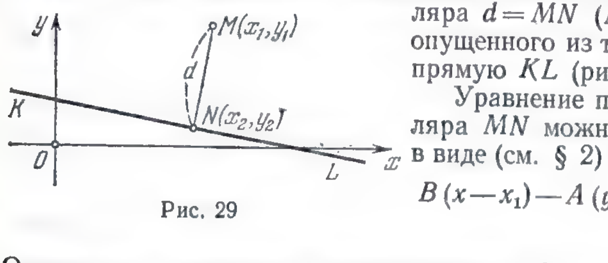


Рис. 29

Уравнение перпендикуляра MN можно записать в виде (см. § 2)

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0. \qquad (2)$$

Отсюда для основания перпендикуляра $N(x_2, y_2)$ будем иметь

$$B(x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0, \qquad (3)$$

и следовательно,

$$\frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B} = t, \qquad (4)$$

где t — коэффициент пропорциональности. Поэтому

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\,|t|. \qquad (5)$$

С другой стороны, учитывая, что точка $N(x_2, y_2)$ лежит на прямой KL, причем из (4) имеем $x_2 = x_1 + At$, $y_2 = y_1 + Bt$, получаем

$$Ax_2 + By_2 + C = A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C = (Ax_1 + By_1 + C) + t(A^2 + B^2) = 0.$$

Следовательно,

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}. \qquad (6)$$

Таким образом, в силу формулы (5) имеем

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (7)$$

В частности, полагая $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, получаем расстояние от начала координат до прямой

$$d_0 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (8)$$

Замечание. Разделив обе части уравнения прямой (1) на $\sqrt{A^2+B^2}$, получим уравнение

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0, \tag{9}$$

свободный член которого $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ численно равен расстоянию от начала координат до прямой. Такое уравнение прямой будем называть *нормированным.*

Из формулы (7) получаем правило: *чтобы определить расстояние от точки до прямой, нужно в левую часть нормированного уравнения этой прямой подставить координаты данной точки и взять модуль полученного результата.*

Пример. Определить расстояние от точки M (—2,7) до прямой

$$24x+7y-2=0.$$

Нормируя уравнение этой прямой, будем иметь

$$\frac{24x+7y-2}{\sqrt{24^2+7^2}}=0, \quad \text{или} \quad \frac{24x+7y-2}{25}=0.$$

Отсюда искомое расстояние есть

$$d=\frac{|24\cdot(-2)+7\cdot7-2|}{25}=\frac{1}{25}=0{,}04.$$

Упражнения

1. Построить прямые, заданные уравнениями:
а) $y=2x-1$; б) $2x-3y-6=0$.

2. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 6, а угол при основании равен 60°. Написать уравнения сторон этой трапеции, приняв за оси координат большее основание и ось симметрии трапеции.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3, 4)$ и составляющей угол в 45° с прямой $y=2x+1$.

4. Написать уравнение прямой, параллельной прямым $3x+2y-6=0$, $6x+4y-3=0$ и проходящей на равных от них расстояниях.

5. Дан отрезок AB с концами $A(-3, 2)$ и $B(1, -1)$. Написать уравнение прямой, соединяющей середину отрезка с началом координат.

6. Дан треугольник ABC с вершинами $A(4, 2)$, $B(-2, 4)$ и $C(-1, -4)$. Написать уравнение медианы, проходящей через вершину C, и найти ее длину.

7. Дан треугольник ABC с вершинами $A(5, 3)$, $B(-3, 4)$ и $C(-2, -5)$. Написать уравнение высоты, проходящей через вершину B, и найти ее длину.

8. Дан треугольник ABC с вершинами $A(6, 4)$, $B(-3, 5)$, $C(-2, -6)$. Написать уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проходящей через вершину B.

9. Через точку (5, 2) провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях координат.

10. В разрезе угольный пласт имеет толщину $y_1 = 5$ м при $x_1 = 100$ м; $y_2 = 15$ м при $x_2 = 200$ м. Предполагая, что пласт имеет форму клина, найти закон изменения толщины его y в зависимости от расстояния x. Чему равна толщина при $x = 300$ м? В какой точке разреза толщина пласта $y = 10$ м?

11. Найти точку пересечения прямых:

а) $5x - 7y - 20 = 0$ и $7x - 10y + 15 = 0$;

б) $2x + 3y - 7 = 0$ и $4x + 6y + 11 = 0$;

в) $2x - y = 0$ и $x - 0{,}5y = 0$.

12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x + 4y - 7 = 0$, $5x + 3y - 8 = 0$ и через начало координат.

13. Найти проекцию точки $M(1, 2)$ на прямую $5x + 2y + 20 = 0$.

14. Одна прямая проходит через начало координат и наклонена к оси Ox под углом α; другая прямая проходит через точку $A(a, 0)$ и наклонена к оси Ox под углом β ($\beta \neq \alpha$). Найти точку пересечения этих прямых.

15. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(4, 3)$. Определить координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

16. Стороны треугольника ABC имеют следующие уравнения: $x + 7y - 11 = 0$ (AB); $2x + y + 4 = 0$ (BC); $3x - 5y - 7 = 0$ (CA). Вычислить площадь треугольника ABC.

17. Найти расстояния от точек $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

18. Дан треугольник с вершинами $A(1, 1)$, $B(-2, 5)$ и $C(-4, -3)$. Найти высоту треугольника, опущенную из вершины C на сторону AB.

19. Найти длину отрезка, перпендикулярного прямым $3x + 4y - 10 = 0$ и $3x + 4y - 45 = 0$ и заключенного между этими прямыми.

20. Написать уравнения прямых, параллельных прямой $8x - 6y + 5 = 0$ и проходящих от нее на расстояниях, равных 2.

21. Найти уравнения прямых, проходящих через начало координат и отстоящих от точки $A(2, 1)$ на расстояния, равные 2/5.

ГЛАВА IV

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Окружность

Выведем уравнение окружности (рис. 30) с центром $C(x_0, y_0)$ и радиусом R. Для произвольной точки $M(x, y)$ окружности выполнено равенство

$$MC = R. \quad (1)$$

Отсюда, вспоминая формулу расстояния между двумя точками (гл. I, § 3), имеем

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R. \quad (2)$$

Рис. 30

Так как обе части равенства (2) положительны, то, возводя в квадрат, получим равносильное уравнение

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2. \quad (3)$$

Итак, координаты любой точки $M(x, y)$ данной окружности удовлетворяют уравнению (3). Справедливо также обратное утверждение.

Таким образом, уравнение (3) представляет собой уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$. Это уравнение носит название *нормального уравнения окружности*.

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат

$$x^2+y^2 = R^2. \quad (4)$$

Уравнение окружности (3) после несложных преобразований можно привести к виду

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0, \quad (5)$$

где $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2+y_0^2-R^2$.

Таким образом, окружность является **кривой второго порядка** (см. гл. II, § 8).

Сравнивая уравнение (5) с общим уравнением кривой второго порядка

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (6)$$

мы видим, что в (5) $B=0$ и, кроме того, $A=1$, $C=1$, т. е. $A=C$.

Обратно, положим в (6) $B=0$ и $A=C\neq 0$:

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (7)$$

Деля уравнение (7) почленно на $A\neq 0$ и полагая

$$D/A=\alpha, \quad E/A=\beta, \quad F/A=\gamma, \qquad (8)$$

мы приходим к уравнению вида (5).

Уравнение (7) называется *общим уравнением окружности*.

Заметим, однако, что не всякое уравнение (7) является уравнением действительной окружности. Легко показать, что (7) определяет действительную кривую (окружность) лишь при $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}-\gamma\geqslant 0$, где α, β, γ выражаются равенствами (8).

Таким образом: *действительная кривая второго порядка является окружностью тогда и только тогда, когда* 1) *коэффициенты при квадратах текущих координат равны между собой и* 2) *отсутствует член, содержащий произведение текущих координат.*

§ 2. Центральные кривые второго порядка

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

($A\neq 0$, $C\neq 0$) без члена с произведением координат x и y ($B=0$)[1]. Дополняя члены, содержащие x и y соответственно, до полных квадратов, будем иметь

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F. \qquad (2)$$

Отсюда, полагая

$$x_0=-\frac{D}{2A}, \quad y_0=-\frac{E}{2C} \qquad (3)$$

[1]) В нашем кратком курсе при рассмотрении общих уравнений кривых второго порядка мы ограничимся лишь этим случаем.

и

$$\Delta=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F, \qquad (4)$$

получаем

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\Delta. \qquad (5)$$

Точка $O'(x_0, y_0)$ представляет собой центр симметрии кривой (5) (*центр кривой*). Действительно, если точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на кривой (5), то симметричная ей относительно O' точка $M_2(x_2, y_2)$, где $x_2=2x_0-x_1$, $y_2=2y_0-y_1$, очевидно, также лежит на кривой (5) (рис. 31).

Параллельные осям координат Ox и Oy прямые $y=y_0$ и $x=x_0$ являются осями симметрии кривой (5) (*оси кривой*). Действительно, если точка $M(x_0, y_0-h)$ лежит на кривой (5), то симметричная ей относительно прямой $y=y_0$ точка $M'(x_0, y_0+h)$ также лежит на этой кривой. Аналогичным свойством обладает прямая $x=x_0$.

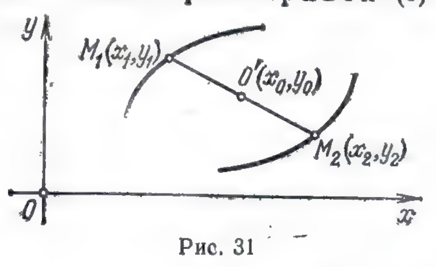


Рис. 31

В дальнейшем, для простоты исследования, будем предполагать, что центр кривой находится в начале координат, т. е. $x_0=0$, $y_0=0$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$Ax^2+Cy^2=\Delta. \qquad (6)$$

Определение 1. *Кривая второго порядка* (6) *называется эллипсом* (*точнее, принадлежит эллиптическому типу*), *если коэффициенты* A *и* C *имеют одинаковые знаки*, т. е.

$$AC>0. \qquad (7)$$

Для определенности будем полагать, что $A>0$ и $C>0$ (так как, в противном случае, знаки членов уравнения (6) можно изменить на обратные).

Возможны три случая: 1) $\Delta>0$, 2) $\Delta=0$ и 3) $\Delta<0$.

В первом случае, $\Delta>0$, имеем *действительный эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (8)$$

где числа

$$a=\sqrt{\frac{\Delta}{A}}, \quad b=\sqrt{\frac{\Delta}{C}} \qquad (9)$$

называются *полуосями эллипса*. Обычно полагают $0 < b \leqslant a$ (этого всегда можно добиться путем надлежащего выбора осей Ox и Oy). Уравнение (8) называется *каноническим уравнением эллипса* с полуосями a и b (рис. 32). Точки $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $A'(-a, 0)$, $B'(0, -b)$ называются *вершинами эллипса* и отрезки $A'A = 2a$ и $B'B = 2b$ — его *осями*. Отметим, что из уравнения (8) имеем $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Заметим, что при $a = b$ получаем окружность

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Во втором случае, $\Delta = 0$, кривая (6) представляет собой точку $O(0, 0)$ (*вырожденный эллипс*).

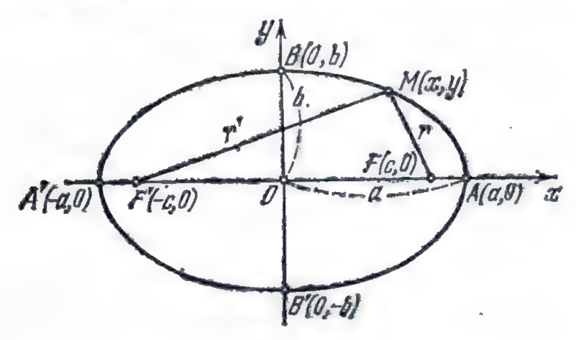


Рис. 32

Наконец, в третьем случае, $\Delta < 0$, кривая (6) не имеет действительных точек; ее условно называют *мнимым эллипсом*.

Определение 2. *Кривая второго порядка* (6) *называется* гиперболой (*точнее, кривой* гиперболического типа), *если коэффициенты* A *и* C *имеют противоположные знаки*, т. е.

$$AC < 0. \tag{10}$$

Положим, для определенности, $A > 0$, тогда $C < 0$. Возможны три случая: 1) $\Delta > 0$, 2) $\Delta = 0$, 3) $\Delta < 0$.

В первом случае, $\Delta > 0$, имеем *гиперболу с каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11}$$

где $a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}$ (*действительная полуось*) и $b = \sqrt{\frac{\Delta}{-C}}$

(*мнимая полуось*) (рис. 33). Точки $A(a,\ 0)$ и $A'(-a,\ 0)$ называются *вершинами гиперболы*. Отметим, что $|x| \geqslant a$.

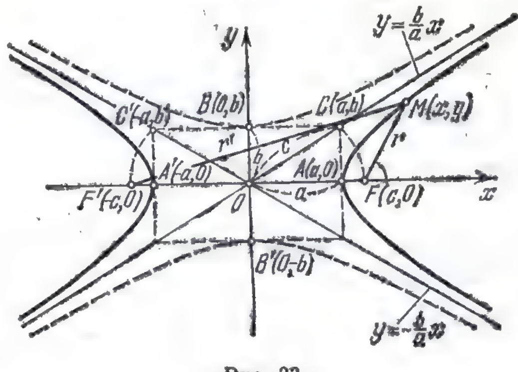


Рис. 33

Во втором случае, $\Delta=0$, получаем пару пересекающихся прямых (*вырожденная гипербола*)

$$(\sqrt{A}x-\sqrt{-C}y)(\sqrt{A}x+\sqrt{-C}y)=0.$$

Наконец в третьем случае, $\Delta<0$, получим гиперболу

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=-1 \qquad (12)$$

с полуосями $a'=\sqrt{\frac{-\Delta}{A}}$ и $b'=\sqrt{\frac{\Delta}{C}}$. Если $a'=a$ и $b'=b$, то гипербола (12) называется *сопряженной* к гиперболе (11); ее вершины: $B(0,\ b)$ и $B'(0,\ -b)$ (рис. 33).

Отрезок $A'A=2a$ называется *действительной осью*, а отрезок $B'B=2b$ — *мнимой осью* гиперболы (11).

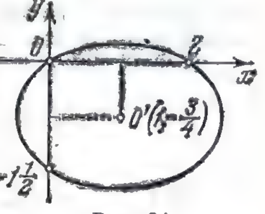


Рис. 34

Пример. Определить вид и расположение кривой

$$x^2+2y^2-2x+3y=0. \qquad (13)$$

Дополняя члены, содержащие x и y соответственно, до полных квадратов, будем иметь

$$(x-1)^2+2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=1+\frac{9}{8}.$$

Отсюда

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{17}{8}}+\frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{17}{16}}=1.$$

Следовательно, кривая (13) представляет собой эллипс с полуосями $a=\sqrt{\frac{17}{8}}\approx 1{,}46$ и $b=\sqrt{\frac{17}{4}}\approx 1{,}03$, центр которого находится в точке $O'\left(1,\ -\frac{3}{4}\right)$ (рис. 34).

§ 3. Фокальные свойства центральных кривых второго порядка

Точки $F(c,\ 0)$ и $F'(-c,\ 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2\mp b^2}, \tag{1}$$

называются *фокусами*, соответственно эллипса, заданного каноническим уравнением (8), рис. 32 (знак $-$), и гиперболы, заданной каноническим уравнением (11), рис. 33 (знак $+$).

Отношение

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \tag{2}$$

называется *эксцентриситетом* центральной кривой второго порядка.

Из формулы (1) имеем: для эллипса $0\leqslant\varepsilon<1$, для гиперболы $1<\varepsilon<+\infty$. Заметим, что для окружности $\varepsilon=0$.

Пусть $r=MF$ и $r'=MF'$ — расстояния от точки M центральной кривой второго порядка до ее фокусов (так называемые *фокальные радиусы точки* M). Имеем

$$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{3}$$

и

$$r'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{4}$$

Так как

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где знак плюс соответствует эллипсу, знак минус — гиперболе, то

$$y^2=\pm b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

и следовательно, с учетом (1) получаем

$$r=\sqrt{x^2-2cx+c^2\pm b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(1\mp\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2cx+(c^2\pm b^2)}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}=\left|\frac{c}{a}x-a\right|=|\varepsilon x-a| \quad (5)$$

и, аналогично,

$$r'=\sqrt{x^2+2cx+c^2\pm b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=|\varepsilon x+a|. \quad (6)$$

Если кривая — эллипс, то $0\leqslant\varepsilon<1$, $|x|\leqslant a$ и поэтому

$$r=a-\varepsilon x,\quad r'=a+\varepsilon x;$$

отсюда

$$r+r'=2a, \quad (7)$$

причем для любых r и r', удовлетворяющих равенству (7), существует точка данного эллипса.

Таким образом, для *любой точки эллипса сумма ее фокальных радиусов есть величина постоянная*. Это свойство часто принимают за определение эллипса (характеристическое свойство эллипса).

Для гиперболы имеем: $\varepsilon>1$, $|x|\geqslant a$. Поэтому

$$r=\pm(\varepsilon x-a),\quad r'=\pm(\varepsilon x+a),$$

где знак $+$ соответствует правой ветви гиперболы ($x>0$), а знак $-$ соответствует левой ветви ($x<0$). Отсюда

$$r'-r=\pm 2a. \quad (8)$$

Итак, *для любой точки гиперболы абсолютная величина разности ее фокальных радиусов есть величина постоянная* (характеристическое свойство гиперболы).

§ 4. Эллипс как равномерная деформация окружности

Рассмотрим окружность радиуса a. Выберем некоторую прямоугольную систему координат Oxy, начало которой, для простоты, поместим в центре окружности $O(0, 0)$. Текущие координаты точки окружности M, для удобства дальнейших рассуждений, обозначим через X и Y. В таком

случае уравнение окружности будет иметь вид (см. § 1)

$$X^2+Y^2=a^2. \qquad (1)$$

Произведем равномерную деформацию окружности (1) в направлении одного из ее диаметров, который, без нарушения общности рассуждения, можно считать вертикальным, т. е. направленным по оси Oy. Пусть k — коэффициент деформации окружности в выбранном направлении, т. е. k есть отношение длины преобразованного вертикального отрезка к его первоначальной длине. Заметим, что при $0 \leqslant k < 1$ мы имеем равномерное сжатие, а при $k > 1$ — равномерное растяжение окружности.

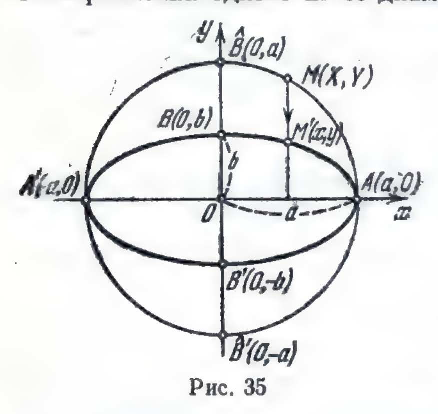


Рис. 35

Предположим, что при нашей деформации точка окружности $M(X, Y)$ переходит в некоторую точку $M'(x, y)$ преобразованной кривой (рис. 35). Так как точки M и M' лежат на одной и той же вертикали, то имеем

$$x=X, \quad y=kY. \qquad (2)$$

Отсюда при $k \neq 0$ [1]) получим

$$X=x, \quad Y=\frac{y}{k}. \qquad (3)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим $x^2+\frac{y^2}{k^2}=a^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (4)$$

где $b=ka$; т. е. преобразованная точка $M'(x, y)$ расположена на эллипсе с полуосями a и b.

Обратно, если точка $M'(x, y)$ принадлежит эллипсу (4), то соответствующая ей в силу (2) точка $M(X, Y)$ лежит на окружности (1).

---

[1]) В случае $k=0$ при деформации окружности получаем отрезок $-a \leqslant x \leqslant a$, $y=0$, который можно рассматривать как вырожденный эллипс.

Таким образом, *результат равномерной деформации окружности вдоль одного из ее диаметров представляет собой эллипс.*

§ 5. Асимптоты гиперболы

Рассмотрим гиперболу (рис. 33)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Решая уравнение (1) относительно y, получаем

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \tag{2}$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \tag{3}$$

Если $|x|$ неограниченно возрастает, то $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\approx 1$, и следовательно, в некотором смысле, имеет место приближенное равенство

$$y\approx\pm\frac{b}{a}x.$$

Покажем, что ветви гиперболы (1) сколь угодно близко подходят к прямым (рис. 33)

$$y=\pm\frac{b}{a}x, \tag{4}$$

носящим название *асимптот гиперболы.* Действительно, например, при $x>0$ возьмем в формулах (2) и (4) знаки плюс. Рассмотрим соответствующие точки $M(x, y)$ гиперболы (2) и $N(x, Y)$ прямой (4), имеющие одну и ту же абсциссу x. Тогда

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\to 0$$

при $x\to+\infty$.

Аналогично рассматриваются еще три случая: знаки минус в (2) и в (4) при $x\to+\infty$; в (2) знак плюс, в (4) минус при $x\to-\infty$ и, наконец, в (2) минус, в (4) плюс при $x\to-\infty$.

Заметим, что сопряженная гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \qquad (5)$$

как нетрудно проверить, имеет общие асимптоты с гиперболой (1).

Для равнобочной гиперболы ($a=b$)

$$x^2-y^2=a^2$$

ее асимптоты $y=\pm x$ взаимно перпендикулярны.

§ 6. График обратной пропорциональности

Рассмотрим кривую

$$xy=a^2 \quad (a>0) \qquad (1)$$

(рис. 36).

Выбирая за новые оси координат Ox' и Oy' биссектрисы координатных углов и учитывая, что угол поворота $\alpha=\frac{\pi}{4}$, будем иметь (см. гл. I, § 2)

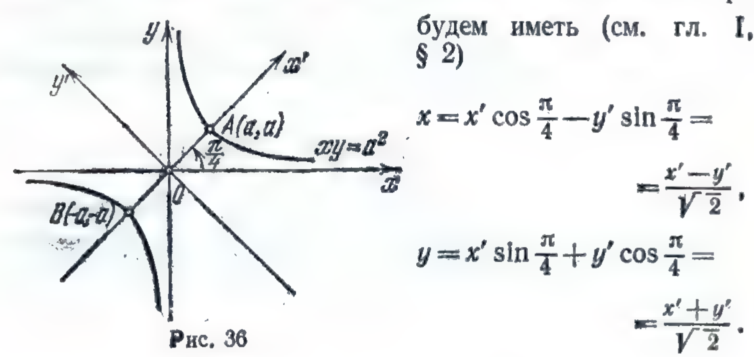


Рис. 36

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда на основании (1) получаем

$$\frac{x'^2-y'^2}{2}=a^2,$$

т. е.

$$x'^2-y'^2=2a^2. \qquad (2)$$

Таким образом, *графиком обратной пропорциональности* (1) *является равнобочная гипербола.*

§ 7. Нецентральные кривые второго порядка

Кривая второго порядка называется *нецентральной*, если она или не имеет центра симметрии, или же имеет бесконечно много центров симметрии (т. е. не имеет единственного центра).

Рассмотрим кривую второго порядка

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где $AC = 0$ и $A^2 + C^2 \neq 0$. Для определенности будем считать, что

$$A = 0, \quad C \neq 0. \qquad (2)$$

Кроме того, предположим, что $D \neq 0$, в противном случае мы бы имели пару параллельных прямых.

Дополняя в уравнении (1) члены с y до полного квадрата, будем иметь

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C},$$

или, полагая

$$x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C}, \quad 2p = -\frac{D}{C}, \qquad (3)$$

получим

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (4)$$

Кривая (4) называется *параболой* (рис. 37); точка $O'(x_0, y_0)$ носит название *вершины параболы*, а число p называется *параметром параболы*. Легко убедиться, что прямая $y = y_0$ является осью симметрии параболы (*ось параболы*); центра симметрии парабола (4) не имеет.

Рис. 37

Если вершина параболы находится в начале координат, а ее осью является ось Ox, то мы получаем так называемое *каноническое уравнение параболы*

$$y^2 = 2px, \qquad (5)$$

причем параметр p здесь обычно считается положительным (этого можно добиться, выбирая надлежащее направление оси Ox; рис. 38).

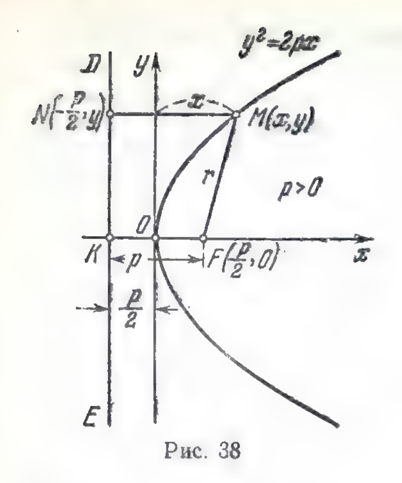


Рис. 38

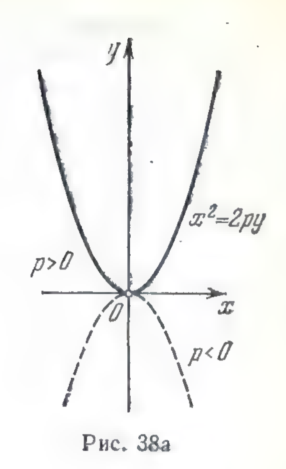


Рис. 38а

Заметим, что если поменять ролями оси Ox и Oy, то каноническое уравнение параболы примет вид

$$x^2 = 2py. \tag{6}$$

Это — уравнение параболы с вертикальной осью (рис. 38а).

§ 8. Фокальное свойство параболы

Рассмотрим параболу (рис. 38)

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \tag{1}$$

Точка $F\left(\frac{p}{2},\, 0\right)$ называется ее *фокусом*; а прямая $x = -\frac{p}{2}$ — *директрисой*.

Для точки $M(x, y)$ ее *фокальный радиус* $r = MF$ равен

$$r = \sqrt{\left(\quad -\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}. \tag{2}$$

Далее, расстояние от этой точки до директрисы равно

$$MN = x + \frac{p}{2} = r.$$

Таким образом, *парабола представляет собой множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной*

точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы). **Это — характеристическое свойство параболы.**

Пример. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y = x^2$.

Сравнивая это уравнение с уравнением (6), получим $2p = 1$; отсюда $p = 1/2$. Следовательно, фокус параболы имеет координаты $(0,\ 1/4)$, а уравнение директрисы есть $y = -1/4$.

§ 9. График квадратного трехчлена

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0). \tag{1}$$

Отсюда

$$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right). \tag{2}$$

Дополняя выражение, стоящее в скобках, до полного квадрата, получим

$$y = A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right)\right],$$

или

$$y - \frac{4AC - B^2}{4A} = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2. \tag{3}$$

Если положить

$$x_0 = -\frac{B}{2A}, \quad y_0 = \frac{4AC - B^2}{4A}, \tag{4}$$

то из формулы (3) получим

$$y - y_0 = A(x - x_0)^2. \tag{5}$$

Делая параллельный перенос системы координат

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0,$$

окончательно будем иметь

$$y' = Ax'^2. \tag{6}$$

Уравнение (6) (см. § 7, формула (6)) представляет собой каноническое уравнение параболы с вертикальной осью, вершина которой находится в точке $O'(x_0,\ y_0)$ и параметр $p = \frac{1}{2A}$. Таким образом, *график квадратного трехчлена является параболой с вершиной в точке $O'(x_0,\ y_0)$, ось которой параллельна оси Oy* (парабола со смещенной вертикальной осью; рис. 39).

Заметим, что абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения параболы (1) с осью Ox являются корнями квадратного уравнения

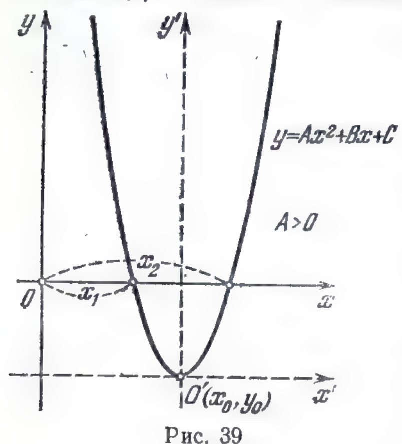


Рис. 39

$$Ax^2+Bx+C=0. \quad (7)$$

На этом свойстве основан графический способ решения квадратного уравнения (7).

Пример. Привести уравнение $y=x^2-4x+3$ к каноническому виду и построить соответствующую параболу.

Перенося свободный член в левую часть уравнения и дополняя правую часть до полного квадрата, будем иметь $y-3+4=x^2-4x+4$, или

$$y+1=(x-2)^2.$$

Полагая $x-2=x'$, $y+1=y'$, получим

$$y'=x'^2.$$

Таким образом, заданное уравнение есть уравнение параболы с вершиной в точке $O'(2, -1)$ и осью симметрии $O'y'$, параллельной оси Oy (рис. 40).



Рис. 40

Упражнения

1. а) Найти координаты центра C и радиус R окружности

$$x^2+y^2+8x-9=0.$$

б) Написать уравнение окружности с центром $C(1, 0)$, проходящей через начало координат.

в) Написать уравнение окружности с центром $C(1/2, 1/2)$, касающейся осей координат.

г) Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок с концами $A(-1, 2)$ и $B(5, 6)$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через центры окружностей:

$$x^2+y^2-6x-8y-3=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+x-3y-1=0.$$

Определить расстояние между центрами этих окружностей.

3. Найти уравнение общей хорды окружностей:

$$x^2+y^2-4x-2y-13=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2-2x-4y-15=0.$$

4. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$x^2+2y^2=8.$$

Построить этот эллипс.

5. а) Написать каноническое уравнение эллипса, длина малой оси которого равна 6, а фокусное расстояние равно 8.

б) Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7.

в) Написать каноническое уравнение эллипса, если расстояния от его фокуса до концов большой оси равны 2 и 18.

6. Найти длину диаметра[1]) эллипса $5x^2+7y^2=24$, делящего угол между осями координат пополам.

7. а) Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы

$$9x^2-16y^2=36.$$

б) Написать каноническое уравнение гиперболы, если длина действительной оси равна 8, а расстояние между фокусами равно 10.

Построить эти гиперболы.

8. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, перпендикулярного к асимптоте гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, проходящей в I и III квадрантах.

9. Найти эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ и сопряженной с ней гиперболы.

10. Найти расстояние между фокусом F_1 гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ и фокусом F_2 сопряженной с ней гиперболы.

11. Найти уравнения прямых, каждая из которых проходит через фокус гиперболы $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ и фокус сопряженной с ней гиперболы.

12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\frac{4}{3}x$ и $y=-\frac{4}{3}x$. Найти эксцентриситет гиперболы, если действительная ось ее совпадает с осью Ox.

13. Написать каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно 10.

14. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y=0{,}25x^2$.

15. Поперечный разрез зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 60 см, а глубина 30 см.

16. Дана парабола $y^2=12x$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $M(8,\ 0)$ и наклоненной к оси параболы под углом 60°.

---

[1]) То есть хорды, проходящей через центр эллипса.

17. Написать уравнение линии, точки которой равноотстоят от точки $A(0,\ 2)$ и оси Ox.

18. Привести уравнение параболы $y=2x^2-8x+5$ к каноническому виду и определить координаты ее вершины.

19. Привести уравнение параболы $y=-3+4x-x^2$ к каноническому виду и определить координаты ее вершины.

20. Привести уравнение параболы $x=y^2-y+2$ к каноническому виду и определить координаты ее вершины.

21. Арка железнодорожного моста, пролет которого $l=60$ м и высота $h=12$ м, имеет форму параболы. Определить высоту h_1 боковых стоек арки, находящихся на расстоянии 15 м от его концов.

ГЛАВА V

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

§ 1. Полярные координаты

Основная идея метода координат состоит в том, что положение точки на плоскости однозначно определяется с помощью двух чисел. Конкретный геометрический смысл этих чисел дает ту или иную систему координат. Наиболее важной после прямоугольной системы, исключительно употреблявшейся нами до сих пор, является *полярная система координат*, к рассмотрению которой мы и переходим.

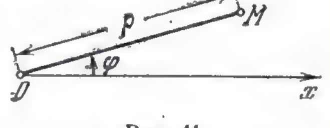


Рис. 41

Возьмем на плоскости точку O, которую назовем *полюсом*. Проведем из полюса O направленную полупрямую Ox, называемую *полярной осью* (рис. 41).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Соединим точку M с полюсом O отрезком OM. Длина отрезка $OM=\rho$ называется *полярным радиусом* точки M, а угол $\varphi=\angle xOM$, отсчитываемый от полярной оси к отрезку OM против движения часовой стрелки, — *полярным углом*. Полярный радиус ρ и полярный угол φ и составляют *полярные координаты* точки M.

Точка M с полярными координатами ρ и φ записывается следующим образом: $M(\rho, \varphi)$, причем на первом месте ставится полярный радиус ρ, а на втором — полярный угол φ.

Что касается значений, принимаемых полярными координатами, то достаточно, очевидно, рассматривать значения ρ от 0 до $+\infty$ $(0 \leqslant \rho < +\infty)$ и значения φ от 0 до 2π $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, при этом, как мы условились, угол φ отсчитывается от полярной оси против хода часовой стрелки. Однако в некоторых вопросах приходится рассматривать углы, бо́льшие 2π, а также отрицательные углы, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по направлению движения часовой стрелки.

§ 2. Связь между прямоугольными и полярными координатами

Рассмотрим переход от полярных координат к прямоугольным и обратно.

Предположим, что полюс полярной системы совпадает с началом прямоугольной системы координат Oxy, а полярная ось является положительной полуосью Ox (рис. 42). Тогда для произвольной точки M имеем

$$OA = x, \quad AM = y, \quad OM = \rho, \quad \angle xOM = \varphi.$$

Считая угол φ острым, из прямоугольного треугольника AOM находим

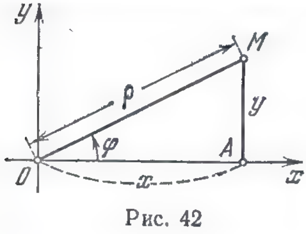


Рис. 42

$$OA = OM \cos\varphi, \quad AM = OM \sin\varphi,$$

или

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Полученные формулы справедливы для любого угла φ. Так выражаются прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты. Далее, из этого же прямоугольного треугольника AOM получаем

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{AM}{OA},$$

или

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

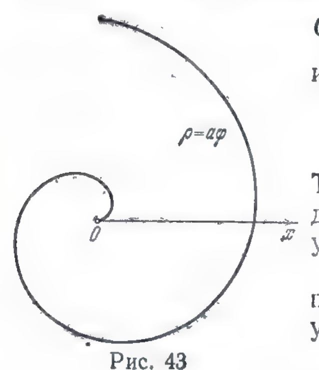


Рис. 43

Так выражаются полярные координаты точки через ее прямоугольные координаты.

Заметим, что при определении полярного угла φ по $\operatorname{tg}\varphi$ нужно учитывать знаки координат x и y.

Ранее мы видели, что линии могут быть заданы с помощью уравнений, связывающих их текущие прямоугольные координаты. Покажем теперь на простейшем примере, что линии могут определяться и уравнениями относительно полярных координат.

Пример. Рассмотрим кривую

$$\rho = a\varphi,$$

где a — некоторое положительное число. Эта кривая называется *спиралью Архимеда*. Для ее построения составляем таблицу соответственных значений φ и ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	...
ρ	0	$\frac{\pi}{4}a$	$\frac{\pi}{2}a$	πa	$\frac{3}{2}\pi a$	$2\pi a$	$\frac{5}{2}\pi a$	...

По этой таблице наносим точки и соединяем их линией, уточняя, если в этом есть необходимость, положение промежуточных точек (рис. 43).

§ 3. Параметрические уравнения линии

Иногда бывает удобнее вместо уравнения линии, связывающего прямоугольные координаты x и y, рассматривать так называемые *параметрические уравнения* линии, дающие выражения текущих координат x и y в виде функций от некоторой переменной величины t (*параметра*). Параметрические уравнения играют важную роль, например, в механике, где координаты x и y движущейся точки $M(x, y)$ рассматриваются как функции времени (*уравнения движения*).

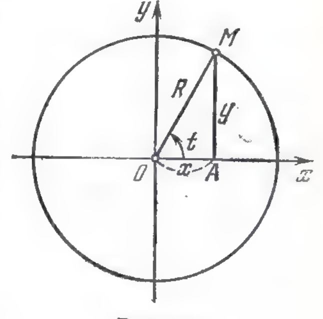


Рис. 44

Пример 1. Выведем параметрические уравнения окружности.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 44). В определяемом ею прямоугольном треугольнике AOM обозначим угол xOM через t. Тогда, очевидно, будут иметь место равенства

$$OA = OM\cos t, \quad AM = OM\sin t,$$

или

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t. \tag{1}$$

Это и есть *параметрические уравнения окружности.*

Чтобы получить обычное уравнение окружности, нужно исключить параметр t. Для этого возводим уравнения (1) в квадрат и складываем их:

$$x^2+y^2=R^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=R^2.$$

Пример 2. Параметрические уравнения эллипса.

Эллипс с полуосями a и b можно рассматривать как равномерно сжатую вдоль вертикального диаметра

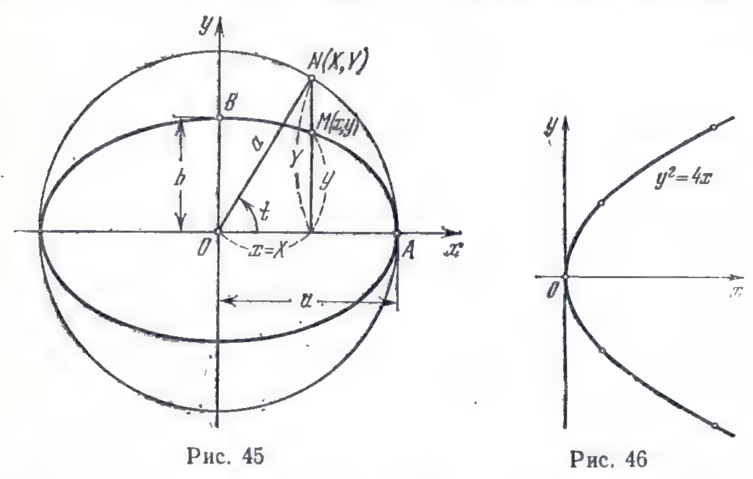


Рис. 45

Рис. 46

окружность радиуса a, где коэффициент сжатия $k=b/a$ (см. гл. IV, § 4). Пусть $M(x,\ y)$ — точка эллипса и $N(X,\ Y)$ — соответствующая точка окружности (рис. 45), где

$$x=X, \quad y=\frac{b}{a}Y. \tag{2}$$

За параметр t примем угол, образованный радиусом ON окружности с положительным направлением оси Ox: $t=\angle NOx$. Используя формулы (2), имеем

$$x=X=a\cos t,$$
$$y=\frac{b}{a}Y=\frac{b}{a}\cdot a\sin t=b\sin t.$$

Таким образом, *параметрические уравнения эллипса* с полуосями a и b есть

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t. \tag{3}$$

Исключив из уравнений (3) параметр t, получим канони-

ческое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Имея параметрические уравнения линии, можно по точкам построить ее.

Пример 3. Построить кривую

$$x=t^2, \quad y=2t. \tag{4}$$

Составляя таблицу значений, будем иметь

t	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	4	1	0	1	4	...
y	...	-4	-2	0	2	4	...

Нанося точки с соответствующими координатами (x, y) на плоскость Oxy и соединяя их линией, получим искомую кривую (рис. 46).

Эта кривая — парабола. В самом деле, исключив параметр t из уравнений (4), получим

$$y^2=4x,$$

т. е. каноническое уравнение параболы.

§ 4. Параметрические уравнения циклоиды

Определение. *Циклоидой называется кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии* (рис. 47).

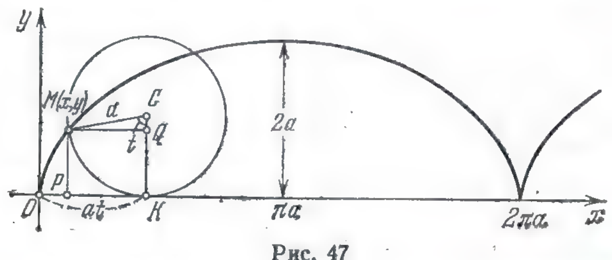


Рис. 47

Выведем параметрические уравнения циклоиды, приняв прямую за ось Ox, предполагая, что радиус катящейся окружности равен a и в начальном положении

движущаяся точка M совпадает с началом координат. За параметр t примем угол поворота (в радианах) подвижного радиуса MC окружности относительно вертикального радиуса KC, где K — точка касания окружности с осью Ox (рис. 47). Так как качение окружности происходит без скольжения, то, очевидно, имеем

$$OK = \overset{\frown}{MK} = at.$$

Отсюда на основании рис. 47 для координат текущей точки M циклоиды получаем следующие выражения:

$$x = OP = OK - PK = OK - MQ = at - a\sin t = a(t - \sin t)$$

и

$$y = PM = KC - QC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Таким образом, параметрические уравнения циклоиды есть

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Упражнения

1. Построить точки по их полярным координатам: $A(5, 0)$, $B(2, \pi/4)$, $C(3, \pi/2)$, $D(1, \pi)$, $E(2, 5\pi/3)$.

2. Какие прямоугольные координаты имеют точки, заданные своими полярными координатами: $A(5, 0)$, $B(6, \pi/4)$, $C(2, \pi/2)$, $D(4, 5\pi/4)$?

3. Построить по точкам логарифмическую спираль $\rho = 2^{\varphi/\pi}$.

4. Написать в полярных координатах уравнения следующих линий: а) $x = 1$; б) $y = -2$; в) $y = x$; г) $y = 2x$; д) $x + y = \sqrt{2}$; е) $x^2 + y^2 = 25$.

5. Написать уравнение прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ в полярных координатах.

6. Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $\rho = a\cos\varphi$. Написать уравнение этой кривой в прямоугольных координатах и выяснить, что это за кривая.

7. Линия в полярных координатах задана уравнением $\rho = 1/(1 - \cos\varphi)$. Написать уравнение этой линии в прямоугольных координатах.

8. Линия задана параметрическими уравнениями $x = a\sin t$, $y = b\cos t$. Найти ее уравнение в прямоугольных координатах.

9. Линия задана параметрическими уравнениями

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Найти ее уравнение в прямоугольных координатах.

10. Линия задана параметрическими уравнениями $x = t^2$, $y = 4t$. Найти ее уравнение в прямоугольных координатах.

11. Точка движется в плоскости Oxy, занимая в момент времени t, отсчитанный от начального момента $t = 0$, положение $M(200 - t, 100 - t)$. В какой момент времени точка достигнет прямой $8x - 6y + 10 = 0$ и каковы ее координаты в этот момент?

ГЛАВА VI

ФУНКЦИЯ

§ 1. Величины постоянные и переменные

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

Определение. *Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение (или вообще, или в данном процессе; в последнем случае постоянная величина называется **параметром**).*

Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Приведем примеры переменных и постоянных величин.

Пример 1. Диаметр и длина окружности, в зависимости от обстоятельств, могут принимать различные значения и, следовательно, вообще говоря, являются величинами переменными, в то время как отношение длины окружности к ее диаметру сохраняет всегда одно и то же значение и, следовательно, есть величина постоянная, называемая числом π ($\pi = 3{,}14159\ \ldots$).

Пример 2. Объем v и давление p определенной массы газа являются величинами переменными; однако, как известно из курса физики, произведение vp при неизменной температуре есть величина постоянная. При изменении же температуры произведение vp, вообще говоря, меняется.

Заметим, что во многих вопросах ради общности формулировок удобно бывает рассматривать постоянную величину как переменную, принимающую одно и то же значение.

§ 2. Понятие функции

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин (*независимые переменные*) полностью определяют значения других (*зависимые переменные* или *функции*).

Например, изучая газ, мы интересуемся его объемом v, температурой t, давлением p. Согласно закону Менделеева—Клапейрона, зная объем и температуру газа, мы можем однозначно определить его давление; следовательно, величины v и t можно рассматривать как независимые переменные, а p — как зависимую (функцию).

Дадим теперь определение понятия функции, являющегося центральным понятием высшей математики,

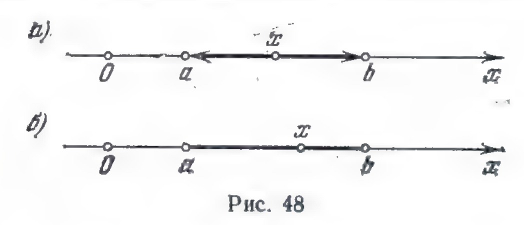


Рис. 48

причем вначале ограничимся случаем двух переменных величин.

Определение. *Переменная величина y называется функцией (однозначной) от переменной величины x, если они связаны между собой так, что каждому рассматриваемому значению величины x (допустимые значения) соответствует единственное вполне определенное значение*[1]) *величины y.*

Это определение впервые в общих чертах было сформулировано гениальным русским математиком Н. И. Лобачевским[2]).

Переменная x называется при этом *аргументом* или *независимой переменной*, y иногда называют *зависимой переменной*. Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся *в функциональной зависимости.*

Совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция y определена, называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Наиболее часто область определения функции представляет собой или *интервал* (a, b) (рис. 48, *а*), т. е. совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$a < x < b$$

---

[1]) Во всем дальнейшем изложении мы будем предполагать, если не оговорено противное, что величины и числа, которые мы рассматриваем, принимают только действительные значения.

[2]) Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России.— М.: Гостехиздат, 1946.

(подчеркнем, что здесь значения $x=a$ и $x=b$ исключаются!), или *отрезок* (*сегмент*) $[a, b]$ (рис. 48, *б*), т. е. совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$a \leqslant x \leqslant b$$

(здесь значения $x=a$ и $x=b$ включаются!). В некоторых случаях областью определения функции является *полуинтервал*, закрытый слева, $[a, b)$, или закрытый справа, $(a, b]$, т. е. множество чисел x, определяемых условиями $a \leqslant x < b$ или соответственно $a < x \leqslant b$. Множество точек, представляющее собой или интервал, или отрезок, или полуинтервал, будем называть *промежутком* и обозначать через $\langle a, b \rangle$.

Рассматриваются также бесконечные интервалы: $(-\infty, a)=\{x \mid x<a\}$, т. е. множество всех чисел, меньших a; $(b, +\infty)=\{x \mid x>b\}$, т. е. множество всех чисел, больших b; $(-\infty, +\infty)$ — множество всех действительных чисел (см. гл. VII, § 1). Аналогичный смысл имеют промежутки $[-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$.

Тот факт, что y есть функция от x, сокращенно обозначают так:

$$y=f(x), \qquad (1)$$

где символ f называется *характеристикой функции*. Для обозначения функциональной зависимости (1) вместо буквы f можно употреблять любую другую букву (например, g, h, F, φ и т. д.), причем понятно, что различные функции должны обозначаться в одном и том же вопросе различными буквами.

Частное значение функции $f(x)$ при $x=a$ записывается так: $f(a)$. Например, если

$$f(x)=x(1-x),$$

то $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=-2$ и т. п.

Приведем несколько примеров, поясняющих понятие функции.

Пример 1. Из формулы площади круга

$$S=\pi R^2$$

следует, что каждому допустимому (т. е. положительному) значению радиуса R соответствует определенное значение площади S. Следовательно, S есть функция от R, определенная в бесконечном интервале: $0 < R < +\infty$.

Пример 2. Согласно закону Бойля — Мариотта при постоянной температуре имеем $vp=C$, где v — объем газа, p — его давление и C — некоторая постоянная величина. Отсюда

$$v=\frac{C}{p}.$$

Следовательно, каждому значению давления p соответствует определенный объем газа v. Можно сказать, что объем газа v есть функция давления p. Из физических соображений вытекает, что область определения этой функции есть бесконечный интервал:

$$0 < p < +\infty.$$

Пример 3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{4 - x^2}. \qquad (2)$$

Эта функция имеет смысл, если $4 - x^2 \geqslant 0$. Отсюда $x^2 \leqslant 4$, или $|x| \leqslant 2$. Следовательно, область определения функции есть отрезок

$$-2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Чтобы более наглядно представить поведение функции, строят *график функции*, рассматривая независимую переменную x и функцию y как прямоугольные координаты некоторой точки M на плоскости Oxy.

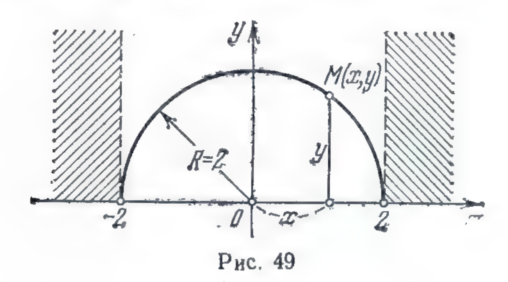


Рис. 49

Определение. *Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.*

Иначе говоря, график функции — это линия, уравнением которой служит равенство, определяющее функцию.

Например, для функции (2) имеем

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y \geqslant 0,$$

графиком, очевидно, является верхняя полуокружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рис. 49). Из рис. 49 становится ясным, что область определения функции представляет собой отрезок $[-2, 2]$.

Отметим, что, построив график функции $y = f(x)$, мы можем приближенно определить корни уравнения

$$f(x) = 0$$

как абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.

Если каждому значению переменной x соответствует одно значение переменной y, то y называется *однозначной функцией* от x; если же хотя бы некоторым значением переменной x соответствует несколько (два, три и т. д.) или бесконечное множество значений переменной y, то y называется *многозначной* (двузначной, трехзначной и т. д.) функцией от x.

Например, $y = x^2$ есть однозначная функция от x. Также $y = \sin x$ есть однозначная функция от x. Функция $y = \pm\sqrt{x}$ есть двузначная функция от x; $y = \operatorname{Arcsin} x$ есть многозначная (бесконечнозначная) функция от x.

В дальнейшем под словом «функция» мы будем понимать однозначную функцию, если явно не оговорено противное.

§ 3. Простейшие функциональные зависимости

1. Прямая пропорциональная зависимость

Определение. *Две переменные величины называются прямо пропорциональными, если при изменении одной из них в некотором отношении другая изменяется в том же отношении.*

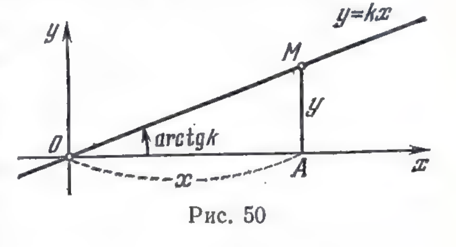


Рис. 50

Примерами прямо пропорциональных величин служат: длина окружности и ее радиус; путь, пройденный при равномерном движении, и протекшее время; линейное растяжение упругого стержня и нагрузка, и многие другие.

Пусть x и y — прямо пропорциональные величины, и пусть при $x = 1$ величина y принимает значение, равное k. В силу определения имеем $\frac{x}{1} = \frac{y}{k}$; отсюда

$$y = kx, \tag{1}$$

где постоянная величина k носит название *коэффициента пропорциональности*. Функция (1) называется *однородной линейной* функцией; ее графиком является прямая линия, проходящая через начало координат, с угловым коэффициентом k (рис. 50).

2. Линейная зависимость

Определение. *Две переменные величины x и y связаны* ***линейной зависимостью****, если*

$$y = y_0 + kx, \qquad (2)$$

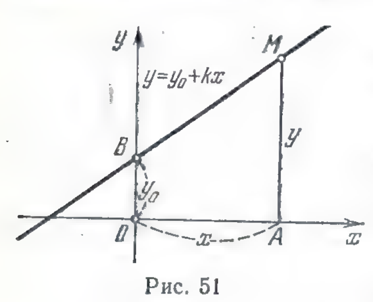


Рис. 51

где k и y_0 — некоторые постоянные величины.

Функция (2) называется *линейной*; ее график есть прямая линия (рис. 51) с начальным отрезком y_0 и угловым коэффициентом k.

Примерами величин, находящихся в линейной зависимости, являются: расстояние прямолинейно и равномерно движущейся точки от начала отсчета и время; длина стержня и температура его, и т. д.

3. Обратная пропорциональная зависимость

Определение. *Две переменные величины называются* ***обратно пропорциональными****, если при изменении одной из них в некотором отношении другая изменяется в обратном отношении.*

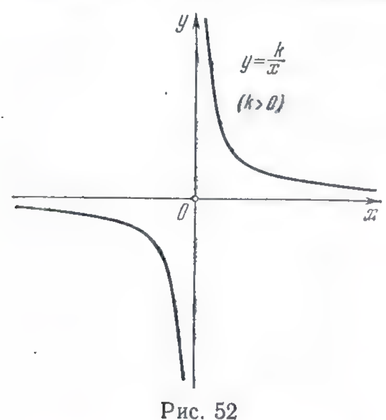


Рис. 52

Примерами обратно пропорциональных величин служат: скорость равномерного движения и время, необходимое для преодоления данного расстояния; объем, занимаемый газом (при постоянной температуре), и давление; сила тока (при постоянной электродвижущей силе) и сопротивление цепи, и т. п.

Пусть x и y — обратно пропорциональные величины, и положим, что когда $x = 1$, то $y = k$. Согласно определению имеем $\frac{x}{1} = \frac{k}{y}$, отсюда

$$y = \frac{k}{x}.$$

График этой функции при $k > 0$ представляет собой равностороннюю гиперболу (всю или часть ее) (рис. 52). При $k < 0$ мы получаем гиперболу, расположенную во II и IV квадрантах.

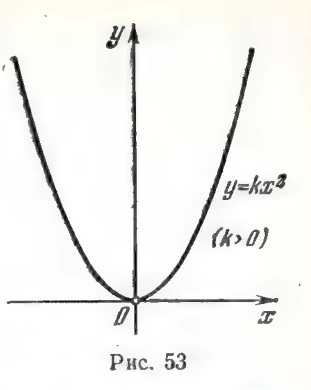


Рис. 53

4. Квадратичная зависимость

Квадратичная зависимость в простейшем случае имеет вид

$$y = kx^2, \qquad (3)$$

где k — некоторая постоянная величина. График функции (3) есть парабола (вся или часть) (рис.53), причем при $k > 0$ парабола расположена выше оси Ox, а при $k < 0$ — ниже оси Ox.

Примерами величин, между которыми имеется квадратичная зависимость, служат: площадь круга и радиус круга; путь, пройденный телом при свободном падении его, и время, и т. п.

5. Синусоидальная зависимость

При изучении периодических процессов важную роль играет *синусоидальная зависимость*

$$y = A \sin(\omega x + \varphi). \qquad (4)$$

Функция (4) называется *гармоникой*; соответствующие постоянные (параметры) носят названия: A — *амплитуда*, ω — *частота* и φ — *начальная фаза*. Функция y — периодическая с периодом

$$T = 2\pi/\omega,$$

т. е. значения функции $y = y(x)$ в точках x и $x + T$, отличающихся на период, одинаковы. Действительно, имеем

$$y(x+T) = A \sin[\omega(x+T) + \varphi] = A \sin(\omega x + 2\pi + \varphi) = \\ = A \sin(\omega x + \varphi) = y(x).$$

Гармонику (4) можно привести к виду

$$y = A \sin \omega (x - x_0), \qquad (5)$$

где $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$. Отсюда получаем, что графиком гармоники

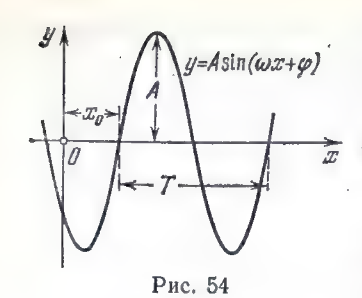


Рис. 54

является деформированная синусоида с амплитудой A и периодом T, сдвинутая вдоль оси Ox на величину x_0 (рис. 54) (подробнее см. § 9).

Примерами синусоидальной зависимости могут служить: отклонения частиц воздуха от положения равновесия при распространении в нем звуковой волны постоянной частоты и время; сила однофазного синусоидального тока и время и т. п.

§ 4. Способы задания функции

Обычно рассматривают три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

1. Аналитический способ задания функции

Если функция выражена при помощи формулы, то говорят, что она задана *аналитически*. Например, в формуле объема шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

объем V есть функция радиуса R, заданная аналитически.

Если функция

$$y = f(x)$$

задана формулой, то ее характеристика f обозначает ту совокупность действий, которую нужно в определенном порядке произвести над значением аргумента x, чтобы получить соответствующее значение функции y [или, что то же самое, значение функции $f(x)$].

Пусть, например,

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}. \qquad (1)$$

Здесь характеристика f обозначает следующую совокупность действий:

1) возведение аргумента x в квадрат;
2) вычитание из полученного результата числа 1;
3) извлечение из соответствующей разности кубического корня.

Зная характеристику f и давая аргументу x различные значения, получим соответствующие значения функции $f(x)$. Так, например, для нашей функции (1) имеем

$$f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2-1}=0,$$
$$f(0)=\sqrt[3]{0^2-1}=-1,$$
$$f(1)=\sqrt[3]{1^2-1}=0$$

и т. д.

Аналогичный смысл получают выражения

$$f(x+h)=\sqrt[3]{(x+h)^2-1}$$

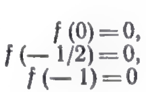
и т. п.

В некоторых случаях функция может задаваться **несколькими формулами.**

Пусть, например,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ x, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Эта функция вполне определена, так как для каждого значения аргумента x мы можем указать соответствующее значение функции $f(x)$. А именно, если x отрицательно или равно нулю, то $f(x)$ равно нулю, например,



$$f(0)=0,$$
$$f(-1/2)=0,$$
$$f(-1)=0$$

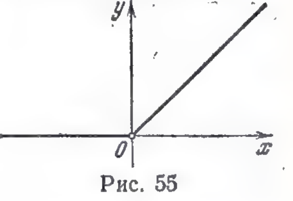


Рис. 55

и т. д.

Если же x положительно, то $f(x)$ равно значению аргумента, например,

$$f(3/4)=3/4, \quad f(5)=5$$

и т. д.

Таким образом, две формулы

$$f(x)=0, \quad \text{если} \quad x \leqslant 0,$$

и

$$f(x)=x, \quad \text{если} \quad x > 0,$$

определяют **одну** функцию (рис. 55).

2. Табличный способ задания функции

Предположим, что мы хотим установить зависимость между средней годовой температурой t (в °С) и высотой местности h над уровнем моря, выраженной в километрах. Сопоставим результаты наших наблюдений в такую таблицу:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t	+7,9	+4,6	+0,1	−5,0	−10,7	−16,9	−23,7	−30,8	−38,0

Из приведенной таблицы мы видим, что средняя годовая температура изменяется вместе с высотой местности над уровнем моря, причем каждому значению высоты h соответствует определенное значение температуры t. Следовательно, средняя годовая температура t есть функция высоты местности h над уровнем моря, при этом соответствие между переменными t и h устанавливается таблицей. Такого рода способ задания функции называется *табличным*.

Зная аналитическое выражение функции, можно представить эту функцию для интересующих нас значений аргумента при помощи таблицы. Пусть, например, имеем функцию

$$y = x^3.$$

Давая x ряд числовых значений и вычисляя соответствующие значения y, получим таблицу

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−27	−8	−1	0	1	8	27	...

Мы видим, что если функция задана аналитически (т. е. при помощи формулы), то можно построить для нее таблицу или, как говорят, *табулировать функцию*.

Табулируются обыкновенно функции, имеющие сложное аналитическое выражение (т. е. выражающиеся сложной формулой), но часто встречающиеся на практике. Так, например, широко известны таблицы тригонометрических функций: $\sin x$, $\cos x$ и т. д., таблицы логарифмов и т. п. Для этих функций имеются формулы, выраженные с помощью бесконечных рядов (см. гл. XXI, § 12), но эти формулы слишком сложны для практического пользования.

Возникает вопрос: всегда ли можно от табличного задания функции перейти к ее аналитическому выражению, т. е. записать такую функцию формулой?

Для этого заметим, что таблица дает не все значения функции, причем промежуточные значения функции могут

быть найдены лишь приближенно (так называемое *интерполирование функции*). Поэтому в общем случае найти точное аналитическое выражение функции по ее табличным данным нельзя.

Однако всегда можно построить формулу, и притом не одну, которая для значений аргумента, имеющихся в таблице, будет давать соответствующие табличные значения функции. Такого рода формула носит название *интерполяционной*.

3. Графический способ задания функции

Аналитический и табличный способы изображения функции страдают отсутствием наглядности. Этого недостатка лишен *графический способ* задания функции $y=f(x)$, когда соответствие между аргументом x и функцией y устанавливается с помощью графика (рис. 56). Здесь, чтобы для некоторого значения аргумента, например x, найти отвечающее ему значение y функции, нужно на оси Ox отложить в соответствующем направлении отрезок $OA=x$, а затем построить перпендикуляр AM до пересечения с графиком. Взяв длину этого перпендикуляра с надлежащим знаком, мы и получим число

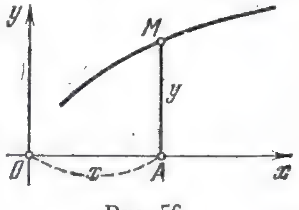


Рис. 56

$$y=f(x).$$

Давая x различные значения, мы с помощью этого приема будем иметь соответствующие значения функции y, которые, если это нужно, можно записать в виде таблицы.

Примером графического изображения функции является так называемая *барограмма* (запись самопишущего прибора — барографа), дающая графически изменение атмосферного давления со временем.

Рис. 57

Для построения графика функции $y=f(x)$, заданной аналитически, нужно составить таблицу значений x и y данной функции, а затем, рассматривая x как абсциссу, y — как ординату точки, построить систему точек плоскости.

Соединяя эти точки линией, вид которой учитывает, по возможности, характер промежуточных значений функции, получим примерное графическое изображение данной функции.

Например, пользуясь данными таблицы на с. 74, строим график функции

$$y = x^3$$

(*кубическая парабола*) (рис. 57).

§ 5. Понятие функции от нескольких переменных

Понятие функции одной независимой переменной естественно распространяется на случай нескольких переменных.

Определение. *Переменная величина называется функцией* (*однозначной*) от нескольких переменных, *например, u — функцией от двух переменных x и y, если каждой рассматриваемой совокупности значений величин x и y* (*допустимые значения*) *соответствует одно определенное значение величины u.*

Здесь переменные x и y называются *независимыми переменными*, или *аргументами*; совокупность рассматриваемых значений их называется *областью определения* или *областью существования* функции u. Область существования функции двух переменных x и y, вообще говоря, представляет собой некоторое множество точек плоскости Oxy.

Тот факт, что u есть функция от x и y, обычно коротко записывается так:

$$u = f(x, y),$$

где f называется *характеристикой функции*. Конечно, вместо буквы f можно употреблять любую другую букву.

Пример 1. Площадь U прямоугольника, стороны которого равны x и y, выражается формулой

$$U = xy.$$

Очевидно, U есть функция двух аргументов x и y, определенная в области $x > 0$, $y > 0$.

Пример 2. Уравнение состояния газа имеет вид $vp = RT$, где v — объем, занимаемый данной массой газа, p — давление, под которым находится газ, T — абсолютная температура и R — некоторая постоянная. Разрешая это уравнение относительно v, получим

$$v = \frac{RT}{p}.$$

Мы видим, что объем v есть функция от двух переменных: давления p и абсолютной температуры T, причем эта функция определена в области $p > 0$, $T > 0$.

Функцию u от трех переменных x, y и z в общем виде можно обозначить так:

$$u = f(x, y, z).$$

Пример 3. Объем $V = xyz$ и полная поверхность $S = 2xy + 2yz + 2zx$ прямоугольного параллелепипеда с линейными измерениями x, y и z являются функциями трех аргументов x, y, z, определенными в области $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$.

§ 6. Понятие неявной функции

Функция называется *явной*, если она задана формулой, правая часть которой не содержит зависимой переменной. Например, функция $y = x^2$ — явная.

Функция y от аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y $(y > 0)$, определяемая уравнением $x^2 + y^2 = 1$, является неявной.

Чтобы выразить функцию y, определяемую уравнением (1), в явном виде, достаточно это уравнение разрешить относительно y. Так как для данного значения аргумента x уравнение (1) может иметь несколько (и даже бесконечное множество) корней y, то в общем случае неявная функция является многозначной.

Совокупность значений аргумента x, для каждого из которых уравнение (1) имеет хотя бы один действительный корень y, представляет собой *область существования* соответствующей неявной функции. Следует отметить, что не всякое уравнение (1) определяет неявную функцию. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

очевидно, не определяет никакой функции (в действительной области!).

Пример. Пусть x и y связаны уравнением $x^2 + y^3 = 1$. Здесь y является неявной функцией от аргумента x. Разрешая это уравнение относительно y, получим $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$. Эта последняя формула дает нам y как явную функцию от x.

Иногда разрешение уравнения (1) относительно y затруднительно. Например, *уравнение Кеплера*

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

элементарными средствами не может быть разрешено относительно y. В таком случае функцию y приходится изучать, пользуясь непосредственно уравнением, определяющим эту функцию.

§ 7. Понятие обратной функции

Пусть y есть функция от аргумента x:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Задавая значения x, будем получать соответствующие значения y. Можно, однако, считая y аргументом, а x — функцией, задавать значения y и вычислять соответствующие значения x. В таком случае уравнение (1) будет определять x как неявную функцию от y. Эта последняя функция называется *обратной* по отношению к данной функции y.

Предполагая, что уравнение (1) разрешено относительно x, получим явное выражение обратной функции

$$x = \varphi(y); \tag{2}$$

где функция $\varphi(y)$ для всех допустимых значений y удовлетворяет условию

$$f[\varphi(y)] = y. \tag{3}$$

Пример 1. В формуле объема шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{4}$$

радиус R является аргументом, а объем V — функцией. Разрешив уравнение (4) относительно R, получим функцию, обратную данной:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Иногда придерживаются стандартных обозначений: под x понимают независимую переменную, а под y — функцию, т. е. зависимую переменную. В таком случае обратную функцию следует писать в виде

$$y = \varphi(x).$$

Например, можно говорить, что функции $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ являются взаимно обратными.

Обратная функция однозначной функции может быть многозначной (рис. 58), т. е. данному значению y может соответствовать несколько значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$

обратной функции $x = \varphi(y)$ (рис. 58). В некоторых случаях удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее возможные значения.

Пример 2. Двузначная функция $x = \pm\sqrt{y}$ является обратной по отношению к функции $y = x^2$. Если условимся для корня брать лишь арифметическое значение его, то обратная функция будет однозначной.

Очевидно, что функция, обратная к функции (2), есть функция (1). Поэтому функции с характеристиками f и φ,

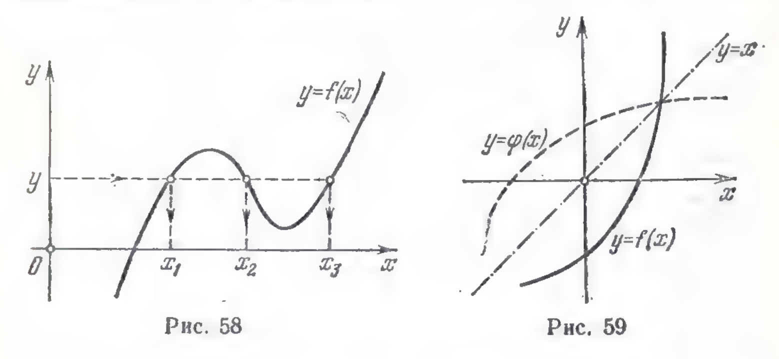


Рис. 58 Рис. 59

связанными соотношением (3), являются **взаимно обратными**. Одна из них называется *прямой функцией*, а другая *обратной*.

Заметим, что одна и та же кривая

$$y = f(x)$$

представляет собой график данной функции и график обратной ей функции, смотря по тому, на какой из осей Ox или Oy откладываются значения аргумента.

Если условиться обозначать независимую переменную через x, а зависимую через y, то чтобы из графика данной функции $y = f(x)$ получить график обратной ей функции $y = \varphi(x)$, очевидно, достаточно первый график зеркально отобразить относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 59).

§ 8. Классификация функций одного аргумента

В зависимости от характера тех действий, которые надо произвести над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции, устанавливается следующая классификация функций.

1) Если над значением аргумента x и некоторыми постоянными выполняются действия: сложение, вычитание, умножение, возведение в целую и положительную степень (и притом конечное число раз), то получается *целая рациональная функция* или *многочлен*. Общий вид такой функции следующий:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

где m — целое положительное или равное нулю число и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ — постоянные числа.

2) Функция, представимая в виде частного от деления двух целых рациональных функций:

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n},$$

называется *дробной рациональной функцией*.

Совокупность целых рациональных и дробных рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

3) Если над аргументом x, кроме выше перечисленных первых пяти алгебраических действий, производится еще извлечение корня конечное число раз и результат не является рациональной функцией, то получается *иррациональная функция*. Например,

$$f(x) = \sqrt{\frac{5x^2 + 4x - 7}{3x^2 - 8x + 4}} + (\sqrt[5]{x} + 1)^3.$$

Здесь под корнем обычно разумеется его арифметическое значение.

Совокупность рациональных и иррациональных функций образует класс *явных алгебраических функций*.

4) В более общем случае *алгебраической функцией* называется многозначная неявная функция y, определяемая уравнением

$$p_0(x)\,y^n + p_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y + p_n(x) = 0,$$

где n — целое положительное число, а коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ — целые рациональные функции от x и сверх того коэффициент $p_0(x)$ не равен тождественно нулю[1]). Например, корень уравнения $y^5 + y - x^2 = 0$ есть алгебраическая функция. Заметим, что эта функция не является явной алгебраической функцией, так как алгебраическое уравнение пятой степени и выше, вообще говоря, неразрешимо в радикалах.

[1]) Алгебраические функции, в общем случае, рассматриваются в комплексной области.

5) Всякая неалгебраическая функция называется *функцией трансцендентной.*

Простейшими трансцендентными функциями (так называемыми *элементарными трансцендентными* функциями) являются:

а) показательная функция a^x, где a — положительное число, не равное единице;

б) логарифмическая функция $\log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;

в) тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$;

г) обратные тригонометрические функции: $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$, $\operatorname{Arcsec} x$, $\operatorname{Arccosec} x$.

Функции алгебраические, элементарные трансцендентные и их конечные комбинации носят название *элементарных функций*. Это тот основной запас функций, с которым мы будем иметь дело на протяжении всего курса.

Заметим, что в нашем курсе мы, как правило, будем использовать лишь однозначные элементарные функции, накладывая, если это нужно, на рассматриваемые многозначные функции дополнительные ограничения.

§ 9. Графики основных элементарных функций

Мы приведем здесь графики некоторых основных элементарных функций.

I. Степенная функция

$$y = x^n, \qquad (1)$$

где n — целое число.

Функция определена при $-\infty < x < +\infty$, если $n \geqslant 0$, и при $0 < |x| < +\infty$, если $n < 0$.

Если $n \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), то графики функций (1) представляют собой параболы соответственно нулевого, первого, второго и т. д. порядков (рис. 60).

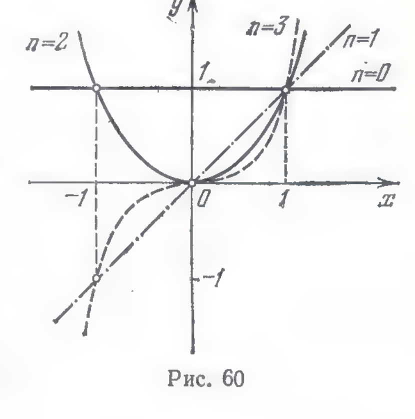


Рис. 60

Если $n < 0$ ($n = -1, -2, \ldots$), то графики функций (1) представляют собой гиперболы различных порядков (рис. 61).

II. Радикал

$$y = \sqrt[n]{x}, \qquad (2)$$

где n — натуральное число.

Область определения функции: $0 \leqslant x < +\infty$ при n четном и $-\infty < x < +\infty$ при n нечетном.

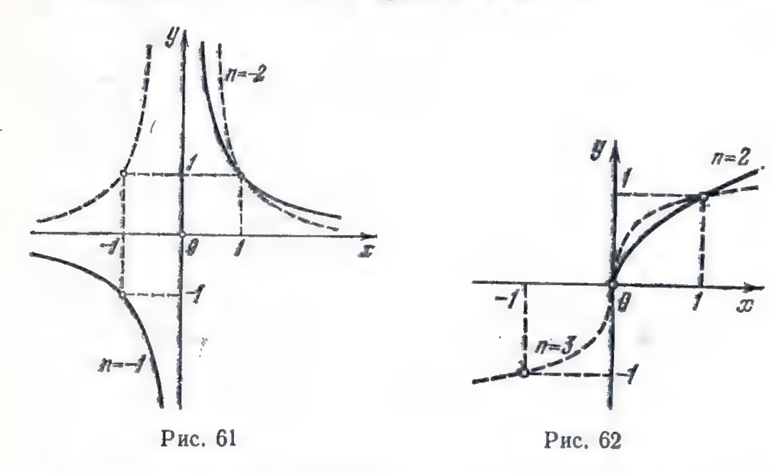


Рис. 61

Рис. 62

Так как $x = y^n$, то (2) является обратной функцией по отношению к степенной функции (1). Поэтому графики радикала при различных показателях n есть параболы или части их (рис. 62).

III. Показательная функция

$$y = a^x,$$

где a — постоянное число, причем $a > 0$, $a \neq 1$.

Эта функция определена при всех значениях x. Функция имеет положительные значения и монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ при $a > 1$ и монотонно убывает от $+\infty$ до 0 при $0 < a < 1$ (рис. 63).

IV. Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad (a > 0, \ a \neq 1). \qquad (3)$$

Область определения $0 < x < +\infty$.

Так как из формулы (3) имеем

$$x = a^y,$$

то логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной функции. Поэтому график логарифмической функции получается из графика показатель-

ной с помощью зеркального отображения последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 64).

V. Тригонометрические функции

В высшей математике аргументом тригонометрической функции является **число**, которое можно рассматривать как меру соответствующего угла, выраженного в радианах.

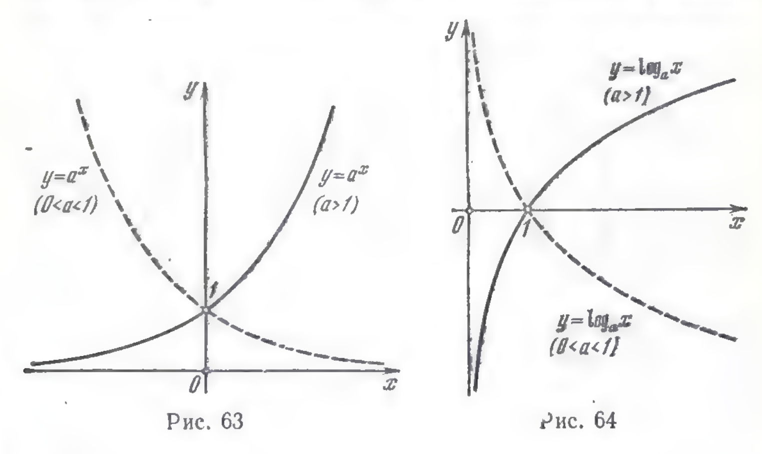


Рис. 63 Рис. 64

Ограничимся обзором наиболее важных тригонометрических функций.

а) $$y = \sin x;$$

функция определена для всех значений x. Функция $\sin x$ — ограниченная ($|\sin x| \leqslant 1$) и периодическая, с периодом

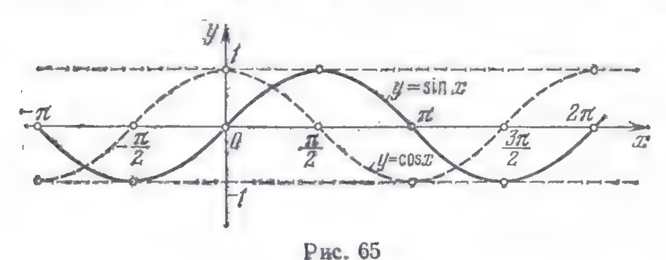


Рис. 65

2π (т. е. значения функции повторяются при изменении аргумента на 2π); графиком ее служит *синусоида* (рис. 65).

б) $$y = \cos x$$

обладает сходными свойствами с функцией $\sin x$. График ее — *косинусоида*, представляющая собой синусоиду, сдвинутую влево на $\pi/2$ (рис. 65). Действительно, $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

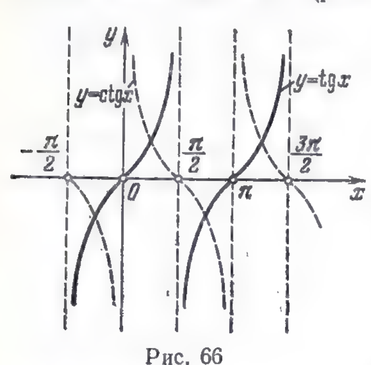


Рис. 66

в) $y = \operatorname{tg} x$

определена при $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); имеет период π. График функции — *тангенсоида* (рис. 66).

г) $y = \operatorname{ctg} x$

определена при $x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); имеет период π. График функции — *котангенсоида*, геометрически тождественная с тангенсоидой (рис. 66).

VI. Обратные тригонометрические функции

а)
$$y = \arcsin x, \tag{4}$$

т. е. *у есть дуга, взятая в пределах*

$$-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2, \tag{5}$$

синус которой равен х:

$$\sin y = x \tag{6}$$

(*главное значение*). Функция (4) однозначно определена на отрезке [—1, 1]; графиком ее служит часть синусоиды (дуга AB на рис. 67).

Рис. 67

Если обратить равенство (6), не накладывая условие (5), т. е. найти все значения y, синус которых равен x, то получим многозначную функцию

$$y = \operatorname{Arcsin} x,$$

графиком которой служит синусоида, идущая вдоль оси Oy. Из свойств дуг, имеющих одинаковый синус, вытекает формула

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \arcsin x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

б) $$y = \arccos x, \tag{7}$$

т. е. *y есть дуга, взятая в пределах*

$$0 \leqslant y \leqslant \pi, \tag{8}$$

косинус которой равен x:

$$\cos y = x \tag{9}$$

(*главное значение*). Функция (7) однозначно определена на отрезке $[-1, 1]$; график ее — часть косинусоиды (дуга AB на рис. 68).

Рис. 68

Решая уравнение (9) относительно y, в общем случае, получим многозначную функцию

$$y = \operatorname{Arccos} x,$$

график которой есть косинусоида, идущая вдоль оси Oy. При этом справедлива формула

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

в) $$y = \operatorname{arctg} x, \tag{10}$$

т. е. *y есть дуга, взятая в пределах*

$$-\pi/2 < y < \pi/2, \tag{11}$$

тангенс которой равен x:

$$\operatorname{tg} y = x \tag{12}$$

(*главное значение*).

Функция (10) определена в промежутке $-\infty < x < +\infty$ однозначно; график ее — дуга тангенсоиды (рис. 69).

Решая уравнение (12) относительно y, в общем случае будем иметь многозначную функцию

$$y = \operatorname{Arctg} x,$$

график которой состоит из бесконечного числа смещенных тангенсоид (10). Справедлива формула

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

г) $$y = \operatorname{arcctg} x, \tag{13}$$

т. е. *y есть дуга, взятая в пределах*

$$0 < y < \pi, \tag{14}$$

котангенс которой равен x:

$$\operatorname{ctg} y = x. \qquad (15)$$

Функция (13) однозначно определена в промежутке $-\infty < x < +\infty$; ее графиком служит дуга котангенсоиды (рис. 70).

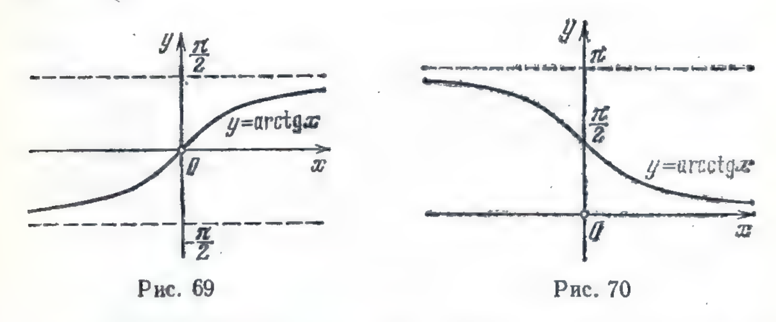


Рис. 69 Рис. 70

Если в уравнении (15) для каждого x определять все значения y, котангенс которых равен x, то получим многозначную функцию

$$y = \operatorname{Arcctg} x, \qquad (16)$$

график которой состоит из бесконечного числа смещенных котангенсоид (13). Имеем

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Рассмотренные графики основных элементарных функций следует помнить. Пользуясь ими, можно легко строить большое количество графиков элементарных функций, рассматривая последние как «преобразованные основные элементарные функции».

Пусть график функции

$$y = f(x) \qquad (17)$$

известен (рис. 71).

Рассмотрим важнейшие преобразования этого графика.

1) График

$$y = f(x - a)$$

представляет собой исходный график (17), сдвинутый в направлении оси Ox на величину, равную a (рис. 71).

2) График

$$y = b + f(x)$$

получается из графика (17) в результате *переноса* последнего в *направлении оси Оу на величину, равную* b (рис. 71).

3) График

$$y = cf(x) \quad (c \neq 0) \tag{18}$$

получается из графика функции $f(x)$ при $0 < c < 1$ с помощью *сжатия* в $1/c$ раз ординат последнего, а при

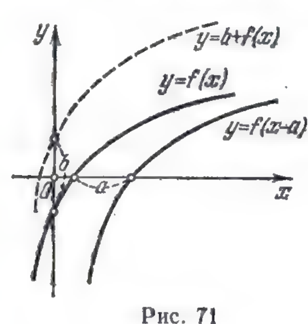


Рис. 71

Рис. 72

$1 < c < +\infty$ с помощью *растяжения* в c раз ординат его с сохранением соответствующих абсцисс (рис. 72).

Если $-\infty < c < 0$, то график (18) является *зеркальным отображением* графика $y = -cf(x)$ *относительно оси* Ox (рис. 72).

4) График

$$y = f(kx) \quad (k \neq 0) \tag{19}$$

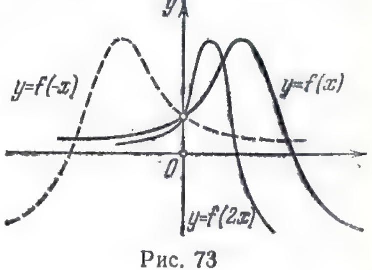


Рис. 73

получается из графика функции $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ *увеличением* в $\frac{1}{k}$ раз абсцисс его точек, а при $1 < k < +\infty$ *уменьшением* в k раз абсцисс его точек, с сохранением их ординат (рис. 73).

Если $-\infty < k < 0$, то график (19) представляет собой *зеркальное отображение* графика

$$y = f(-kx)$$

относительно оси Oy (рис. 73).

Приведенные правила геометрически очевидны, и доказательство их предоставляем читателю.

Комбинируя преобразования 1)—4), получаем возможность, исходя из графиков простых функций, строить графики относительно сложных функций.

Пример. Построить график функции $y=3\sin 2x$.

На основании правил преобразования 3) и 4) этот график представляет собой синусоиду $y=\sin x$, абсциссы точек которой уменьшены в два раза, а ординаты увеличены в три раза (по абсолютной величине, с сохранением знака; рис. 74).

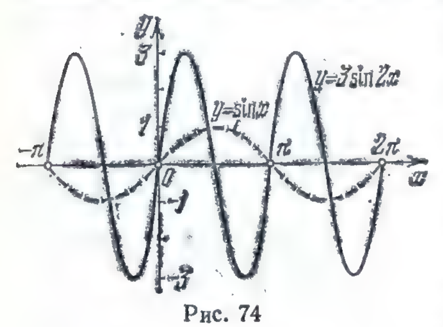


Рис. 74

При построении графика функции важно учитывать *симметрию графика* и *периодичность*.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* *четной*, *если она не изменяет своего значения при изменении знака аргумента*, т. е. если

$$f(-x)=f(x).$$

Например, четными функциями являются $x^0=1$, x^2, $\cos x$ и т. п.

График четной функции $y=f(x)$, очевидно, симметричен относительно оси Oy (рис. 75). Поэтому

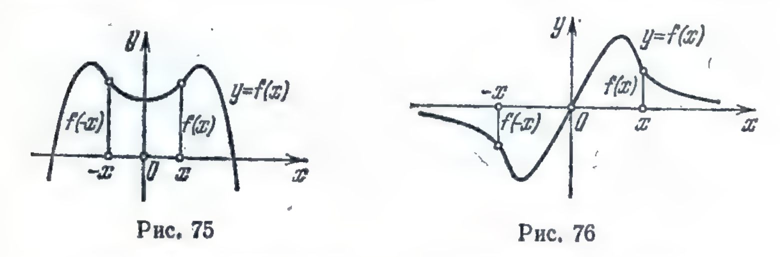


Рис. 75 Рис. 76

для четной функции достаточно строить лишь правую половину графика ($x\geqslant 0$); левая половина его ($x\leqslant 0$) является зеркальным отображением правой относительно оси ординат.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется* *нечетной*, *если при изменении знака аргумента знак функции меняется на противоположный, а численное значение ее сохраняется, т. е. если*

$$f(-x)=-f(x).$$

Например, нечетными функциями являются x, x^3, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. п.

График нечетной функции $y=f(x)$, очевидно, симметричен относительно начала координат (рис. 76). Поэтому, чтобы построить график нечетной функции, достаточно изобразить правую половину его ($x \geqslant 0$); левая половина графика ($x \leqslant 0$) получается в результате поворота правой на 180°.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число T такое, что*

$$f(x+T) \equiv f(x).$$

Наименьшее число с таким свойством называется *периодом* функции (рис. 77). С периодическими функциями мы встречались уже ранее (гл. VI, § 3); например, периодическими являются функции $\sin x$ (период 2π), $\cos x$ (период 2π), $\operatorname{tg} x$ (период π), $\operatorname{ctg} x$ (период π) и т. д.

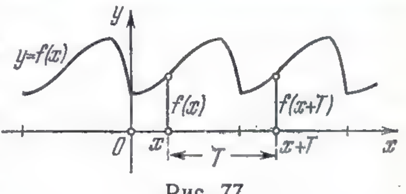


Рис. 77

Для построения графика периодической функции достаточно изобразить его на отрезке, длина которого равна периоду (*основная область*), а затем построить периодическое продолжение графика, приписав одинаковые значения ординат точкам, абсциссы которых отличаются на число, кратное периоду.

§ 10. Интерполирование функций

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную двумя первыми столбцами таблицы

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
...	...	...	...
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	...
x_3	y_3	...	...
...	...	...	...

Мы будем предполагать, что табличные значения ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ... аргумента x равноотстоящие; иными словами, разность

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1}$$

есть величина постоянная (Δ — символ разности). Величина h называется *шагом таблицы*. Для изучения закономерности поведения функции y пополним нашу таблицу *разностями* Δy *первого порядка* (*первые разности*):

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2}$$

Если функция $y = y_0 + kx$ — линейная, то ее разность $\Delta y_i = kh$ есть величина постоянная.

Аналогично можно составить разности *второго порядка* (*вторые разности*):

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) =$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3}$$

и т. д.

Если функция y линейная, то ее вторые разности $\Delta^2 y_i$ равны нулю. Для квадратичной функции $y = a + bx + cx^2$ ее вторые разности $\Delta^2 y_i$ постоянны (проверить!).

Рис. 78

Под *интерполированием* понимается приближенное нахождение функции y для нетабличных промежуточных значений аргумента x.

Пусть шаг таблицы h мал и разности Δy_i почти постоянны. Положим, что x_0 есть ближайшее наименьшее табличное значение для данного нетабличного значения x, т. е. $x_0 < x < x_1$. На промежутке (x_0, x_1) функцию y приближенно можно считать линейной Y такой, что $Y(x_0) = y_0$ и $Y(x_1) = y_1$. Геометрически это значит, что мы дугу кривой $\overset{\frown}{M_0M_1}$ заменяем соответствующей хордой $\overline{M_0M_1}$ (рис. 78). Так как угловой коэффициент хорды $\overline{M_0M_1}$ равен

$$k = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

то

$$y \approx Y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \tag{4}$$

(*линейная интерполяция*).

Вводя величину

$$\frac{x-x_0}{h}=t \tag{5}$$

(«расстояние между точками x и x_0, измеренное в шагах»), приближенную формулу (4) можно записать в следующем виде:

$$y=y_0+t\Delta y_0. \tag{6}$$

С помощью формулы (6) можно также производить обратное интерполирование, т. е. по значению функции y ($y_0 \leqslant y \leqslant y_1$) находить соответствующее значение аргумента x. Действительно, имеем

$$t=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}. \tag{7}$$

Отсюда на основании (5) получаем

$$x=x_0+th. \tag{8}$$

Пример 1. Функция $y=y(x)$ задана таблицей:

x	1	1,02	1,04
y	1,21	1,44	1,69

Применяя линейное интерполирование, найти y (1,005). Чему равен x, если $y(x)=1,5$?

Здесь шаг $h=0,02$. Полагая $x_0=1$, имеем $t=\frac{1,005-1}{0,020}=$ $=\frac{1}{4}$. Отсюда по формуле (6) находим $y=1,21+\frac{1}{4}\times$ $\times 0,02=1,215$.

Для обратного интерполирования полагаем $x_0=1,02$ и $y_0=1,44$. Отсюда $\Delta y_0=1,69-1,44=0,25$. По формулам (7) и (8) находим

$$t=\frac{1,5-1,44}{0,25}=\frac{0,06}{0,25}=0,24$$

и $x=1,02+0,24 \cdot 0,02=1,0248$.

Заметим, что для $x \in (x_0, x_1)$ получается аналогичная формула линейного интерполирования, если вместо ближайшего наименьшего табличного значения x_0 воспользоваться его ближайшим наибольшим табличным значе-

нием x_1, что иногда более выгодно. А именно, имеем

$$y \approx y_1 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_1). \tag{4'}$$

Для получения более точных результатов иногда прибегают к *квадратичному интерполированию*, заменяя на промежутке (x_0, x_2) функцию y квадратным трехчленом $\tilde{Y}$ таким, что

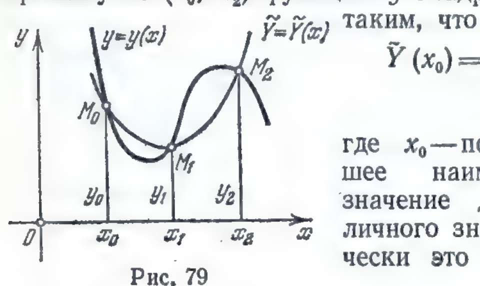


Рис. 79

$$\tilde{Y}(x_0) = y_0, \quad \tilde{Y}(x_1) = y_1, \quad \tilde{Y}(x_2) = y_2, \tag{9}$$

где x_0 — по-прежнему ближайшее наименьшее табличное значение для данного нетабличного значения x. Геометрически это означает (рис. 79), что мы дугу $\overset{\frown}{M_0M_1M_2}$ графика функции $y = y(x)$ приближенно заменяем параболой с вертикальной осью, проходящей через точки M_0, M_1, M_2.

Функцию $\tilde{Y}$ запишем в следующем искусственном виде (10):

$$\tilde{Y} = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)(x - x_1). \tag{10}$$

Полагая $x = x_0$, в силу (9) получаем $\tilde{Y}(x_0) = y_0 = a$; отсюда

$$a = y_0. \tag{11}$$

Аналогично, при $x = x_1$ будем иметь $\tilde{Y}(x_1) = y_1 = a + b(x_1 - x_0)$; отсюда, используя (11) и учитывая, что $x_1 - x_0 = h$, находим

$$b = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}. \tag{12}$$

Наконец, при $x = x_2$ имеем

$$\tilde{Y}(x_2) = y_2 = a + b(x_2 - x_0) + c(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Отсюда, так как $x_2 - x_0 = 2h$ и $x_2 - x_1 = h$, то, принимая во внимание (11) и (12), получаем

$$c = \frac{y_2 - y_0 - \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h}{2h^2} = \frac{(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - 2\Delta y_0}{2h^2} =$$

$$= \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}. \tag{13}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y \approx \tilde{Y} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \qquad (14)$$

(*формула квадратичного интерполирования*).

Полагая

$$\frac{x - x_0}{h} = t \qquad (15)$$

и

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{(x - x_0) - (x_1 - x_0)}{h} = t - 1, \qquad (16)$$

получим более удобную формулу квадратичного интерполирования:

$$y \approx y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0. \qquad (17)$$

Пример 2. Функция $y = y(x)$ задана двумя первыми столбцами таблицы:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0,20	1,2214	626	33
0,25	1,2840	659	33
0,30	1,3499	692	
0,35	1,4191		

Применяя формулу квадратичного интерполирования, найти $y(0{,}27)$.

В качестве начального значения выбираем $x_0 = 0{,}25$ (необходимые элементы таблицы подчеркнуты!). Шаг таблицы $h = 0{,}05$.

Находим разности $\Delta y_0 = 0{,}0659$ и $\Delta^2 y_0 = 0{,}0033$ (в таблице для краткости десятичные разряды опускаются).

Имеем

$$t = \frac{0{,}27 - 0{,}25}{0{,}05} = 0{,}4.$$

Отсюда по формуле (17) получаем

$$y(0{,}27) = 1{,}2840 + 0{,}4 \cdot 0{,}0659 + \frac{0{,}4 \cdot (-0{,}6)}{2} \cdot 0{,}0033 =$$
$$= 1{,}2840 + 0{,}0264 - 0{,}0004 = 1{,}3100.$$

Упражнения

1. В треугольнике ABC, основание которого $AC=b$ и высота $BD=h$, проведена прямая EF, параллельная основанию AC и отстоящая от него на расстоянии x. Выразить площадь y трапеции $AEFC$ как функцию от x; определить область существования этой функции и построить ее график.

2. Определить область существования функций:

а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\sqrt{x^2-1}$; в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$;

г) $y=\lg(1+x)$.

3. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(x+1)$, если

$$f(x)=x^2-3x+2.$$

4. Зная, что $f(1)=-2{,}23$ и $f(2)=1{,}05$, приближенно найти $f(1{,}3)$, считая функцию линейной на отрезке $[1, 2]$ (*линейная интерполяция*).

5. Результаты измерения величин x и y приведены в таблице:

x	10	15	25
y	10	20	40

Найти зависимость между x и y, зная, что она линейная.

6. Найти целую рациональную функцию второй степени:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

такую, что $f(0)=-3$, $f(1)=0$, $f(2)=5$.

7. Пусть $\varphi(x)=x^2$ и $\psi(x)=2^x$. Найти $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$.

8. Найти $f[f(x)]$ и $f\{f[f(x)]\}$, если $f(x)=1/(1-x)$.

9. Для данных функций найти явные обратные:

а) $y=2x+3$; б) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; в) $y=\sin\dfrac{x}{2}$.

10. Построить графики элементарных функций:

а) $y=x^{2/3}$; б) $y=\dfrac{1}{x-2}$; в) $y=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; г) $y=\lg(x+2)$;

д) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

е) $y=\sin^2 x$. $\left(\text{Указание. } \sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)$;

ж) $y=4\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; з) $y=-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; и) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$;

к) $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$.

11. Приближенно найти действительные корни уравнения $x^3-3x+1=0$, построив график функции $y=x^3-3x+1$.

12. Приближенно найти наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$, построив графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$.

13. Функция $y = y(x)$ задана таблицей:

x	0,6	0,7
y	1,8221	2,0138

Используя линейное интерполирование, найти $y(0{,}63)$. Чему равно x, если $y(x) = 2$?

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Действительные числа

Под *величиной* в математике понимается все то, что может быть измерено; при этом физическая сущность величины для нас безразлична. Поэтому выводы математики обладают общностью, они применимы ко всем величинам вообще. Процесс измерения величины состоит в сравнении ее с другой однородной величиной (т. е. величиной той же природы), принятой за единицу. Результат измерения величины есть *число* — значение измеряемой величины. Если измеряемая величина и единица измерения соизмеримы между собой (т. е. имеют общую меру), то результат измерения есть *рациональное число*

$$x=\frac{m}{n},$$

где m и n — целые числа. Если измеряемая величина и единица измерения несоизмеримы между собой (т. е. не имеют общей меры), то результат измерения есть *иррациональное число* (например, $\sqrt{2}$, π и т. д.), которое можно изобразить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби

$$x=p_0,\ p_1p_2\ldots p_n\ldots$$

Если брать в этой дроби конечное число знаков после запятой, то мы будем получать некоторые рациональные числа, которые дадут нам значение измеряемой величины с любой степенью точности; поэтому практически при измерениях можно обойтись числами рациональными. Однако при формулировке общих законов избежать иррациональных чисел нельзя (например, площадь круга $S=\pi R^2$, где π — число иррациональное). Числа рациональные и иррациональные носят название *действительных* или *вещественных* чисел[1]). Для геометрического изображения

[1]) В дальнейшем, под словом «число», если явно не оговорено противное, мы будем понимать «действительное число».

действительных чисел служит числовая ось Ox (рис. 80), где в определенном масштабе расположены числа: рациональные $\left(\text{целые } 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ и дробные } \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}, \ldots \text{ и т. д.}\right)$ и иррациональные. В результате все действительные числа помещаются на числовой оси, заполняя последнюю без просветов, т. е. *каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой оси и, обратно,*

-2 -1 0 1 2 3 x

Рис. 80

каждой точке числовой оси отвечает некоторое действительное число. Поэтому вместо слова «действительное число» часто говорят «точка».

Для приложений к множеству всех действительных чисел x присоединяют два символа $-\infty$ и $+\infty$ со свойствами:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Такая система действительных чисел называется *расширенной*. Предполагается, что справедлива следующая арифметика:

а) $$x \pm \infty = \pm \infty;$$

б) $$\frac{x}{\pm\infty} = 0;$$

в) $$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \text{если} \quad x > 0,$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \quad \text{если} \quad x < 0.$$

Действительные числа могут быть положительными и отрицательными. В некоторых случаях приходится игнорировать знак числа, т. е. рассматривать его *модуль*.

Определение. *Модулем (или абсолютной величиной) действительного числа x называется такое неотрицательное число, обозначающееся $|x|$,* что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|-5| = 5$, $|3| = 3$. Очевидно, для всякого числа x имеет место равенство $|-x| = |x|$.

Если расположить действительные числа на числовой оси, то модуль $|x|$ любого числа x представляет собой

расстояние от начала отсчета O до соответствующей точки A с абсциссой x: $|x| = OA$ (рис. 81).

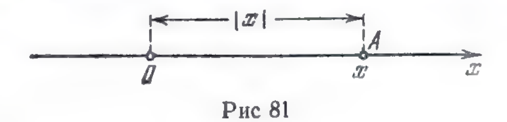


Рис 81

Отсюда следует, что если модуль числа x удовлетворяет неравенству

$$|x| < a \quad (\text{или } |x| \leqslant a), \tag{1}$$

то число x подчинено ограничению:

$$-a < x < a \ (\text{или соответственно } -a \leqslant x \leqslant a), \tag{2}$$

т. е. x принадлежит интервалу $(-a, a)$ (или отрезку $[-a, a]$). В частности, для любого числа x справедливо неравенство

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Обратно, если имеет место одно из двойных неравенств (2), то выполняется соответственно одно из неравенств (1).

Рис. 82

Более общее утверждение: если

$$|x - x_0| < a \ (\text{или } |x - x_0| \leqslant a),$$

то, так как $|x - x_0|$ равно расстоянию между точками x и x_0, имеем

$$x_0 - a < x < x_0 + a \ \ (\text{или } x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a)$$

и обратно (рис. 82).

Модуль действительного числа обладает следующими свойствами.

1) *Модуль суммы двух или нескольких чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел.*

В самом деле, пусть сначала x и y — действительные числа одинаковых знаков, т. е. $xy \geqslant 0$. Очевидно, имеем

$$|x + y| = |\pm|x| \pm |y|| = |\pm(|x| + |y|)| = |x| + |y|$$

(например, $|-3-5| = |-(3+5)| = 3+5$).

Пусть теперь x и y — действительные числа различных знаков, т. е. $xy < 0$, причем для определенности предположим, например, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда имеем

$$|x+y| = |\pm|x| \mp |y|| = |\pm(|x|-|y|)| = \\ = |x|-|y| < |x|+|y|$$

(например, $|-5+2| = |-(5-2)| = 5-2 < 5+2$).

Таким образом, для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \tag{3}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда числа x и y одинаковых знаков.

Замечание. Неравенство (3) легко распространяется на любое конечное число слагаемых, например,

$$|x+y+z| = |(x+y)+z| \leqslant |x+y|+|z| \leqslant |x|+|y|+|z|.$$

2) *Модуль разности двух чисел больше или равен разности модулей этих чисел.*

В самом деле, в силу свойства 1 имеем

$$|x| = |y+(x-y)| \leqslant |y|+|x-y|.$$

Отсюда

$$|x-y| \geqslant |x|-|y|.$$

3) *Модуль произведения двух или нескольких чисел равен произведению модулей этих чисел*, например,

$$|xy| = |x||y|.$$

4) *Модуль частного равен частному модулей (если делитель отличен от нуля)*, т. е. если $y \neq 0$, то

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

5) *Модуль целой положительной или целой отрицательной степени равен соответствующей степени модуля основания*, т. е.

$$|x^n| = |x|^n.$$

Доказательство почти очевидных предложений 3)—5) предоставляем читателю.

§ 2. Погрешности приближенных чисел

Измеряя величину с точным значением a, мы обычно получаем лишь ее *приближенное значение* x; разность $a-x$ называется *ошибкой* приближенного числа x. Число a будем называть *точным числом*, а число x—приближенным. Если $x \leqslant a$, то x называется *приближением по недостатку*: если же $x \geqslant a$, то x называется *приближением по избытку*.

Определение 1. *Абсолютной погрешностью* (*или абсолютной ошибкой*) Δ_0 *приближенного числа* x *называется модуль разности между соответствующим точным числом* a *и данным приближенным числом* x, т. е.

$$\Delta_0 = |a - x|. \tag{1}$$

Если точное число a неизвестно, то формула (1) не дает возможности определить абсолютную погрешность Δ_0 приближенного числа x. В этом случае ограничиваются *оценкой сверху* абсолютной погрешности Δ_0, т. е. находят положительное число Δ, по возможности мало отличающееся от Δ_0, такое, что

$$\Delta_0 \leqslant \Delta. \tag{2}$$

Число Δ, удовлетворяющее неравенству (2), называется *предельной абсолютной погрешностью* приближенного числа x. Очевидно, имеем

$$x - \Delta \leqslant a \leqslant x + \Delta; \tag{3}$$

вместо неравенства (3) употребляется также сокращенная запись

$$a = x \pm \Delta. \tag{3'}$$

Часто бывает, что известны два приближенных числа x_1 и x_2, между которыми заключается точное число a:

$$x_1 \leqslant a \leqslant x_2.$$

Тогда можно положить

$$a = x \pm \Delta,$$

где $x = (x_2 + x_1)/2$ и $\Delta = (x_2 - x_1)/2$.

Абсолютная погрешность, взятая без учета измеряемой величины, не характеризует точности измерения. Например, если при измерении длины стола $a_1 = 2$ м и длины железной дороги $a_2 = 200$ км допущена одна и та же абсолютная погрешность $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,1$ м, то это не значит, что

измерения равноточны; очевидно, второе измерение точнее первого. Для оценки точности измерений вводят понятие *относительной погрешности.*

Определение 2. *Относительной погрешностью (относительной ошибкой)* δ_0 *приближенного числа* x *называется отношение абсолютной погрешности* Δ_0 *этого числа к модулю соответствующего точного числа* a, т. е.

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|a|}. \tag{4}$$

Отсюда

$$\Delta_0 = |a|\,\delta_0, \tag{5}$$

т. е. *абсолютная погрешность приближенного числа равна относительной погрешности его, умноженной на модуль соответствующего точного числа.*

Если точное число a неизвестно или слишком громоздко, то дают верхнюю оценку числа δ_0. Число δ, удовлетворяющее неравенству

$$\delta_0 \leqslant \delta,$$

называется *предельной относительной погрешностью* приближенного числа x. Очевидно, если $x > 0$, то можно положить

$$\delta = \frac{\Delta}{x - \Delta},$$

где Δ — предельная абсолютная погрешность числа x такая, что $x - \Delta > 0$.

Пример 1. Какова предельная относительная погрешность δ числа $x = 3{,}14$, заменяющего число π?

Так как $3{,}14 < \pi < 3{,}142$, то абсолютная погрешность Δ_0 числа x удовлетворяет неравенству $\Delta_0 < 0{,}002$. Отсюда

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{\pi} < \frac{0{,}002}{3{,}14} < 6{,}4 \cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, можно принять $\delta = 0{,}064\ \%$.

Так как точное число a во многих случаях найти трудно, то на практике полагают $a \approx x$, где x — достаточно близкое к a приближенное число, и пользуются приближенными формулами

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \tag{4'}$$

и

$$\Delta_0 \approx |x|\,\delta_0 \tag{5'}$$

($\approx$ — знак приближенного равенства). Соответствующие формулы справедливы также для предельных погрешностей.

Пример 2. Результат измерения с точностью до 0,5 % равен $x = 25{,}7$ м. Определить предельную абсолютную погрешность Δ этого измерения.

Из формулы (5′) имеем $\Delta \approx 25{,}7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \approx 0{,}13$. Следовательно, измеряемую величину a можно положить равной $a = 25{,}7 \text{ м} \pm 0{,}13$ м.

Введем некоторые понятия, связанные с изображением чисел в десятичной системе, причем ограничимся рассмотрением лишь положительных чисел[1]). Всякая цифра в десятичном изображении числа, отличная от нуля, и нуль, если он не служит для обозначения десятичного разряда или не замещает неизвестную или отброшенную цифру, называется *значащей цифрой* этого числа. Например, число 0,0507 имеет три значащие цифры: 5, 0 и 7. Запись числа 27 600 не позволяет судить о числе значащих цифр его; так, если это число имеет четыре значащие цифры, то его следует записать, например, в виде $2{,}760 \cdot 10^4$. Значащие цифры приближенного числа разделяются на *верные и неверные.*

Определение 3. *Говорят, что приближенное число имеет n верных значащих цифр (знаков, считая слева направо), если абсолютная погрешность этого числа не превышает* 1/2 *единицы его n-го разряда.*

Например, если число $x = 2{,}356$ имеет три верных знака 2, 3, 5, то для абсолютной погрешности этого числа имеем

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005.$$

Математические таблицы составляются таким образом, что все помещенные в них знаки являются верными. Например, для четырехзначной таблицы логарифмов гарантируется, что абсолютная погрешность мантиссы каждого числа удовлетворяет неравенству $\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

В некоторых случаях абсолютная погрешность приближенного числа может достигать единицы его n-го разряда, тогда будем говорить, что данное число имеет *n верных знаков в широком смысле.* Если абсолютная погрешность приближенного числа может достигать двух единиц

---

[1]) Влияние знака можно учесть особо.

его n-го разряда, то говорят, что первые $n-1$ значащих цифр числа *верные*, а n-я цифра его *сомнительная*.

Понятие верных цифр не всегда можно понимать буквально, т. е. в том смысле, что если приближенное число имеет n верных знаков, то n первых цифр приближенного числа и n первых цифр точного числа совпадают между собой. Например, если $a=1$ есть точное число и $x=0{,}999$ — приближенное число, то все знаки последнего, очевидно, верны в широком смысле, хотя ни одна цифра точного числа не совпадает с соответствующей цифрой данного приближенного числа. Однако в большинстве случаев буквальное понимание будет верным.

Количество верных знаков приближенного числа характеризует точность измерения и позволяет найти предельную относительную погрешность этого числа.

Пример 3. Приближенное число $x=8{,}3047$ имеет два верных знака. Какова предельная относительная погрешность δ этого числа? Здесь для абсолютной погрешности имеем

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2}\cdot 0{,}1 = 0{,}05.$$

По формуле (4′) имеем оценку относительной погрешности

$$\delta_0 \approx \frac{0{,}05}{8{,}3047} = 0{,}006.$$

Следовательно, приближенно можно принять $\delta = 0{,}6\ \%$.

Обратно, зная предельную относительную погрешность приближенного числа, можно определить количество его верных знаков.

Пример 4. Предельная относительная погрешность приближенного числа $x=623{,}809$ равна $\delta=0{,}2\ \%$. Сколько верных цифр имеет это число?

Используя формулу (5′), находим оценку абсолютной погрешности нашего приближенного числа $\Delta_0 \approx 0{,}2\cdot 0{,}01\cdot 623{,}809 \approx 1{,}2$. Не совсем строго можно считать, что число x имеет три верные цифры в широком смысле.

В окончательной записи приближенного числа, вообще говоря, нет смысла сохранять неверные цифры; в крайнем случае можно удержать одну запасную цифру. Поэтому цифры приближенного числа, не являющиеся верными, обычно откидывают, или, как говорят, приближенное число округляют. Также часто приходится округлять громоздкие точные числа.

Правило округления. 1) *Если первая отброшенная цифра числа (считая слева направо)* **меньше** 5,

то оставшиеся цифры его оставляют без изменения; 2) *если же первая из отброшенных цифр* **больше или равна** 5, *то первую из оставшихся цифр увеличивают на единицу.*

Например, округляя число $\pi = 3,141592\ldots$ до пяти, четырех, трех значащих цифр, соответственно получим приближенные числа 3,1416, 3,142 и 3,14.

Специально выделяется частный случай, когда округляется на одну цифру число, имеющее последнюю цифру 5. Тогда *последняя сохраненная цифра оставляется без изменения, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная* (*правило четной цифры*).

При округлении приближенного числа мы, вообще говоря, увеличиваем его погрешность, добавляя к абсолютной погрешности числа *погрешность округления.*

При пользовании правилом округления погрешность округления, очевидно, не превышает 1/2 единицы последнего сохраненного десятичного разряда.

Отсюда следует, что:

1) *если точное число округлить до n значащих цифр, то полученное приближенное число будет иметь n верных десятичных знаков;*

2) *если же приближенное число с n верными десятичными знаками округлить до n значащих цифр, то полученное новое приближенное число будет иметь n верных десятичных знаков в широком смысле.*

§ 3. Предел функции

В математическом анализе, как правило, рассматриваются **безразмерные** величины, т. е. величины, лишенные физического содержания. Совокупности значений таких величин представляют собой некоторые числовые множества. Исходя из этого и используя логические символы $\forall$ («для любого») и $\exists$ («существует», «найдется»), можно формализовать определение функции, приведенное в главе VI (§ 2).

Определение 1. *Пусть X и Y — данные числовые множества. Если в силу некоторого соответствия f, сопоставляющего элементам множества X элементы множества Y, $\forall x \in X$ $\exists y \in Y$ (единственный), то y называется однозначной* **функцией** *от x, определенной на множестве X.*

Этот факт коротко обозначается следующим образом:

$$y = f(x) \quad (x \in X)\ ^{1)}. \qquad (1)$$

Множество значений функции (1), по смыслу определения, содержится в Y, т. е. $\{f(x)\} \subset Y$.

Можно сказать, что функция f осуществляет *отображение* множества X в множество Y (рис. 83).

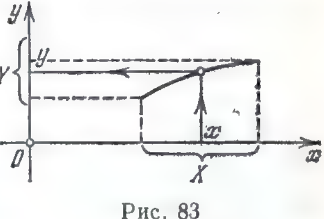


Рис. 83

Если $\{f(x)\} = Y$, т. е. любой элемент $y \in Y$ является значением функции f, то говорят, что функция f *отображает* множество X на множество Y.

Пример. Функция $f(x) = \sin x$ $(0 < x < 2\pi)$ отображает интервал $X = (0, 2\pi)$ на отрезок $Y = [-1, 1]$.

Пусть между элементами множеств X и Y функция $y = f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, т. е. $\forall x \in X$ существует один и только один его *образ* $y = f(x) \in Y$ и обратно, $\forall y \in Y$ найдется единственный

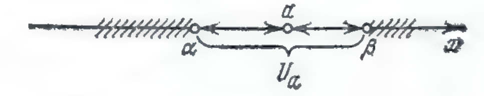


Рис. 84

прообраз $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$, устанавливающая соответствие между элементами множеств Y и X, называется *обратной* для функции $y = f(x)$. Иными словами, обратная функция f^{-1} является отображением множества Y на множество X. Очевидно, функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ взаимно обратны.

Определение 2. *Под окрестностью U_a точки a (a — действительное число) будем понимать любой интервал $\alpha < x < \beta$, окружающий эту точку* $(\alpha < a < \beta)$, *из которого удалена точка a* (рис. 84).

---

[1]) Строго говоря, под функцией (1) следует понимать само соответствие f, в силу которого для каждого $x \in X$ подыскивается его партнер $y \in Y$. При этом $f(x)$ представляет собой значение функции f в точке x. Однако на практике символ $f(x)$, где x принимает все возможные значения, также называют функцией.

Под *окрестностью* U_∞ символа $\infty \equiv \pm\infty$ понимается внешность любого отрезка $[\alpha, \beta]$ (рис. 85), т. е. $U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$. Естественно, что символ ∞ не содержится в своей окрестности.

Рис. 85

Замечание. Общепринято под окрестностью точки a понимать любой интервал $I_a = (\alpha, \beta)$, содержащий точку a, т. е. если I_a есть окрестность точки a, то $I_a \ni a$. При нашем определении окрестности U_a точки a, для удобства дальнейших рассуждений мы исключаем из нее саму точку a, т. е. полагаем $a \notin U_a$. Такое множество точек обычно называется проколотой (или пунктированной) окрестностью точки a.

Допуская вольность речи, множество точек $U_a = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$ мы называем просто окрестностью точки a (в нашем смысле). Такое определение окрестности согласуется с обыденным ее пониманием. Например, естественно предполагать, что в окрестность города Москва не входит сам город Москва! Тем более, что при определении односторонних окрестностей точки a: $U_a^- = (\alpha, a)$ (*левая окрестность*) и $U_a^+ = (a, \beta)$ (*правая окрестность*) точка a всегда исключается! (см. § 4).

Итак, в дальнейшем, если явно не оговорено противное, под *окрестностью* точки a мы будем понимать любой интервал, окружающий эту точку, из которого выкинута сама точка a.

В тех случаях, когда удобно будет считать, что окрестность точки a содержит саму точку a, мы будем называть ее «полной окрестностью точки a».

Как нетрудно убедиться: 1) сумма (объединение) любого числа окрестностей точки a и 2) произведение (пересечение) конечного числа окрестностей точки a есть также окрестности этой точки.

Рис. 86

Для положительного числа δ окрестность U_a некоторой конечной точки a назовем ее *δ-окрестностью*, если $U_a = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, т. е. если

$$\forall x \in U_a \qquad 0 < |x-a| < \delta$$

(см. рис. 86).

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X. Точка a (a конечно) называется *предельной точкой* (*точкой накопления*) этого множества, если в любой ее δ-окрестности

U_a содержится бесконечно много элементов $x \in X$, т. е. $\forall U_a \quad U_a \cap X \neq \varnothing$. В простейшем случае можно предполагать, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, причем в самой точке a функция $f(x)$ не обязательно имеет смысл.

Итак, пусть a—предельная точка множества X—области определения функции $f(x)$.

Определение 3. *Число A называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to a$ *(a—число), т. е.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ-окрестность $U_a = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$, $\delta = \delta(\varepsilon)$—зависит от ε, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ при } x \in U_a \text{ [1]}). \qquad (2)$$

Конечно, неравенство (2) должно выполняться для всех тех x, для которых определена функция $f(x)$, т. е. для $x \in X \cap U_a$; согласно определению предельной точки в каждой окрестности U_a множество таких значений не пусто.

Замечание 1. По смыслу определения предела функции, числа ε и $\delta = \delta(\varepsilon)$ можно полагать достаточно малыми.

Определение 4. *Утверждение*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

эквивалентно следующему:

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ при } |x| > \Delta, \qquad (3)$$

где $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ зависит от ε.

Множество всех точек x, для которых $|x| > \Delta$, очевидно, является симметричной окрестностью U_∞ символа ∞; при этом предполагается, что для любой такой окрестности $U_\infty \cap X \neq \varnothing$; условно можно сказать, что ∞ есть предельная точка множества X—области определения функции $f(x)$.

Объединяя определения 2) и 3), получим общее определение предела функции при $x \to a$, которое годится как для конечного a, так и для $a = \infty$.

---

[1]) Для простоты здесь используется δ-окрестность точки a, т. е. ее симметричная окрестность. Однако определение остается в силе для любой окрестности $\tilde{U}_a = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$, так как она, очевидно, содержит δ-окрестность точки a, где $\delta = \min(a-\alpha, \beta-a) > 0$.

Общее определение предела функции. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве X, и a — предельная точка этого множества. Число A является **пределом функции** $f(x)$ **при** $x \to a$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U_a точки a*[1]*), что*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in U_a \cap X \tag{4}$$

(при этом $U_a \cap X \neq \varnothing$).

Коротко этот факт записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{5}$$

или

$$f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to a. \tag{5'}$$

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4. \tag{6}$$

Для удобства рассуждений мы будем предполагать, что $1 < x < 3$, т. е. $|x-2| < 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Имеем

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| = |x-2|(x+2) < 5|x-2| < \varepsilon,$$

если $|x-2| < \varepsilon/5$ и $|x-2| < 1$. Отсюда можно положить

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{5}, 1\right) > 0.$$

Таким образом, равенство (6) доказано. Заметим, что здесь δ-окрестность точки $x = 2$ — полная, т. е. содержит точку 2.

Пример 2. Показать, что

$$\frac{x}{x+1} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{7}$$

Имеем

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{|x-(-1)|} \leqslant \frac{1}{|x| - |-1|} = \frac{1}{|x| - 1} < \varepsilon,$$

если только

$$|x| > 1 + \frac{1}{\varepsilon} = \Delta,$$

что эквивалентно утверждению (7).

---

[1]) Не обязательно симметричная.

Замечание 2. Не следует думать, что функция $f(x)$ постоянно остается меньше своего предела.

Возможны три случая: 1) функция не превышает своего предела, например, $\frac{x^2}{x^2+1} \to 1$ при $x \to \infty$, причем $\frac{x^2}{x^2+1} < 1$;

2) функция не меньше своего предела, например, $x^2 \to 0$ при $x \to 0$, причем $x^2 > 0$ при $x \neq 0$;

3) функция колеблется вокруг своего предела, принимая значения то меньше, то больше его; например,

$$2+\frac{\sin x}{x} \to 2 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Замечание 3. При рассмотрении предела функции $f(x)$ при $x \to a$, для простоты, можно было бы предполагать, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a.

Однако, как показывают самые простые примеры, это неудобно для приложений.

Пример 3. Пусть

$$f(x)=\frac{\sqrt{\sin x}}{x} \qquad (x > 0).$$

Эта функция определена на множестве $X=(0, \pi]\cup[2\pi, 3\pi]\cup\ldots$, которое не является окрестностью бесконечно удаленной точки ∞. Тем не менее, с нашей точки зрения, имеем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Отметим одно простое предложение.

Теорема 1. *Если функция $f(x)=c$ постоянна в некоторой окрестности точки a, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)=c,$$

причем c является единственным пределом этой функции при $x \to a$.

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

Функцию, имеющую предел, не следует путать с ограниченной функцией.

Определение 5. *Функция $f(x)$ называется ограниченной на данном множестве X, если существует такое положительное число M, что*

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{при} \quad x\in X.$$

Если такого числа M нет, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*.

Лемма. *Функция $f(x)$, имеющая предел A при $x \to a$, ограничена в некоторой окрестности точки a.*

Действительно, выбирая $\varepsilon=1$, имеем $|f(x)-A|<1$ при $x\in U_a$, где U_a — соответствующая окрестность точки a.

Отсюда для всех допустимых значений аргумента x [1]) получаем

$$|f(x)|=|[f(x)-A]+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|=M,$$

если только $x\in U_a$.

Замечание 4. Обратное утверждение неверно: ограниченная функция может не иметь предела.

Например, функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ограничена при $0<|x|<+\infty$ и не имеет предела при $x\to 0$.

Отметим еще одну теорему, устанавливающую связь между границами функции и ее пределом.

Теорема 2. *Пусть существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *и*

$$M<f(x)<N \tag{8}$$

в некоторой окрестности U_a *точки* a. *Тогда*

$$M\leqslant A\leqslant N. \tag{9}$$

Доказательство. Действительно, пусть $A<M$. Полагая $\varepsilon=M-A>0$, в некоторой окрестности V_a точки a будем иметь

$$|f(x)-A|<M-A, \text{ т. е. } -(M-A)<f(x)-A<M-A.$$

Отсюда, выбирая $x\in V_a\cap U_a$, получим $f(x)<M$, что противоречит левому неравенству (8).

Аналогично опровергается предположение $A>N$.

Замечание 5. Теорема 2 остается верной, если в (8) одно или оба неравенства нестрогие.

Следствие. *Положительная функция не может иметь отрицательного предела.*

Замечание 6. Понятие предела функций одной переменной естественно переносится на функции нескольких переменных.

Рассмотрим, например, функцию двух переменных $f(x, y)$, заданную на некотором множестве X плоскости Oxy.

Под *окрестностью* $U_{a,b}$ точки $M_0(a, b)$ (a и b конечны) будем понимать внутренность любого прямоугольника $\{\alpha_1<x<\beta_1,\ \alpha_2<y<\beta_2\}$, построенного вокруг точки M_0 (т. е. $\alpha_1<a<\beta_1$, $\alpha_2<b<\beta_2$), из которого удалена сама точка M_0.

---

[1]) То есть таких $x\in U_a$, для которых функция $f(x)$ имеет смысл.

В таком случае утверждение

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$$

означает, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists U_{a,b}$ такая, что $\forall M(x, y) \in U_{a,b}$ справедливо неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \qquad (10)$$

Конечно, при этом предполагается, что в любой окрестности $U_{a,b}$ найдутся точки $M(x, y)$, в которых функция $f(x, y)$ имеет смысл (*предельная точка*).

Это определение легко обобщается на тот случай, когда a или b, или оба вместе — символы ∞.

§ 4. Односторонние пределы функции

В приложениях встречаются так называемые односторонние пределы функции.

Введем понятие левой и правой окрестностей точки a (a — число).

Определение 1. 1) *Любой интервал* $U_a^- = (\alpha, a)$, *правым концом которого является точка* a, *называется ее левой окрестностью.*

2) *Аналогично, любой интервал* $U_a^+ = (a, \beta)$, *левым концом которого является точка* a, *называется ее правой окрестностью.*

Символическая запись $x \to a - 0$ обозначает, что x принимает лишь значения, принадлежащие некоторой левой окрестности точки a, т. е. $x \to a$, $x < a$.

Аналогично, запись $x \to a + 0$ обозначает, что $x \to a$, $x > a$.

Определение 2. 1) *Формула*

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) = A,$$

где функция $f(x)$ *определена на множестве* X *и* a — *предельная точка этого множества* (a — *конечное*), *а* A — *число, обозначает, что* $\forall \varepsilon > 0\, \exists U_a^-$ *такая, что*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ при } x \in X \cap U_a^- \text{ [1]} \qquad (1)$$

(*предел функции слева*).

[1]) Можно, конечно, ограничиться рассмотрением левых δ-окрестностей точки a: $U_a^- = (a - \delta, a)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

2) *Аналогично, формула*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = B$$

(B — число) имеет следующий смысл:

$$|f(x) - B| < \varepsilon \text{ при } x \in X \cap U_a^{+}\,{}^{1)}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно и U_a^+ зависит от ε (предел функции справа).

Для чисел A и B употребляется символическая запись (рис. 87):

$$A = f(a-0) \text{ и } B = f(a+0).$$

Если функция $f(x)$ определена в точке a, то ее значение в этой точке обозначается через $f(a)$; конечно, оно может не совпадать с числами $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

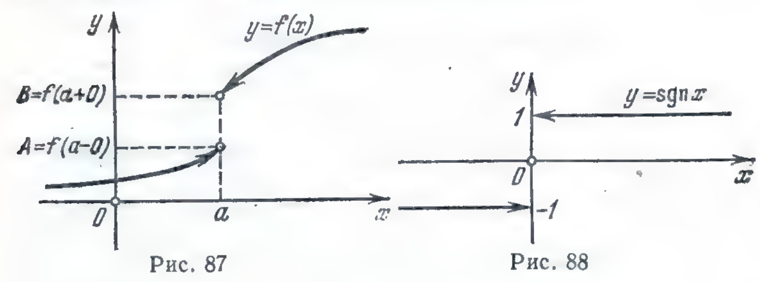


Рис. 87 Рис. 88

Определение 3. *Под окрестностью символа $-\infty$ понимается любой интервал $(-\infty, \alpha)$, а под окрестностью символа $+\infty$ понимается любой интервал $(\beta, +\infty)$.*

Формулы

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A' \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = B'$$

расшифровываются так:

$$|f(x) - A'| < \varepsilon \text{ при } x \in (-\infty, \Delta_1),$$

а

$$|f(x) - B'| < \varepsilon \text{ при } x \in (\Delta_2, +\infty),$$

где ε произвольно, $x \in X$ и $\Delta_i = \Delta_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$.

Пример. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$ (рис. 88). Имеем

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to +0} f(1) = 1\,{}^{2)}.$$

---

[1]) Обычно полагают $U_a^+ = (a, a+\delta)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

[2]) Здесь для краткости используются обозначения: $-0 \equiv 0-0$ и $+0 \equiv 0+0$.

Замечание 5. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ (a — число) необходимо и достаточно выполнение равенства

$$f(a-0)=f(a+0).$$

§ 5. Предел последовательности

Под *последовательностью*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел $X=\{1, 2, \ldots\}$.

По аналогии с пределом функции в бесконечно удаленной точке вводится понятие предела последовательности. А именно, число a есть *предел последовательности* x_n $(n=1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,^{1)},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, зависящее от ε, что для всех натуральных $n > N$ выполнено неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Пример. Пусть $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 0{,}99$, $x_3 = 0{,}999$, ... Имеем

$$x_n = 1 - \frac{1}{10^n} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$, если $n > \lg\frac{1}{\varepsilon} = N$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

§ 6. Бесконечно малые

Определение. *Функция* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой при* $x \to a$ (*a — вещественное число или символ* ∞), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* U_a *точки* a, *что*

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \text{ при } x \in U_a\,^{2)} \qquad (1)$$

---

[1]) Строго говоря, нужно писать $n \to +\infty$. Но так как n — натуральное, то по смыслу $n \to \infty$ и $n \to +\infty$ — одно и то же.

[2]) Как обычно, неравенство (1) должно выполняться для тех x, для которых функция $\alpha(x)$ определена, причем предполагается, что множество таких значений не пусто в любой окрестности U_a точки a.

Условие (1) эквивалентно следующему:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0, \tag{2}$$

т. е. *предел бесконечно малой* $\alpha(x)$ *равен нулю и обратно.* Иными словами:

$$\alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a. \tag{3}$$

Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x \to a-0$ и $x \to a+0$, а также при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$.

Замечание. Если

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{4}$$

то в силу определения предела функции получаем, что разность $f(x) - A$ есть бесконечно малая. Таким образом, из формулы (4) получаем представление функции $f(x)$, имеющей при $x \to a$ предел A, в виде

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{5}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Обратно, если для функции $f(x)$ справедлива формула (5), то число A является пределом функции при $x \to a$. Из формулы (5) вытекает важная лемма о сохранении знака функции.

Лемма. *Если* $\lim_{x \to a} f(x) = A \neq 0$, *то в некоторой окрестности* U_a *точки* a *знак функции* $f(x)$ $(x \in X)$ *совпадает со знаком числа* A.

Действительно, пусть $\varepsilon = |A| > 0$. Выбирая окрестность U_a так, чтобы $|\alpha(x)| < |A|$ при $x \in U_a$, в силу равенства (5) будем иметь

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A\ [1],$$

где $x \in U_a \cap X$.

Пример. Точка M движется по оси Ox, причем закон движения ее

$$x = 2^{-t} \sin t \quad (t \text{ — время}).$$

Очевидно, $|x| \leqslant 2^{-t} < \varepsilon$, если $t > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = T$. Поэтому

$$\lim_{t \to +\infty} x = 0.$$

[1]) Запись $\operatorname{sgn} x$ читается: «знак x». Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом: $\operatorname{sgn} x = +1$, если $x > 0$; $\operatorname{sgn} 0 = 0$; $\operatorname{sgn} x = -1$, если $x < 0$ (ср. рис. 88).

Таким образом, точка M совершает затухающие колебания вокруг начала координат.

Замечание. Функция $f(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности U_a, по смыслу определения (1), является бесконечно малой при $x \to a$.

Заметим, что никакая постоянная функция $f(x) = c \neq 0$, где число c сколь угодно мало по абсолютной величине, не может быть названа бесконечно малой. Поэтому так называемые физические бесконечно малые (например, масса молекулы, размер атома, заряд электрона и т. п.), с математической точки зрения, не являются бесконечно малыми.

§ 7. Бесконечно большие

Определение. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ (a—число или символ ∞):*

$$f(x) \to \infty \text{ при } x \to a, \tag{1}$$

если для любого $E > 0$ существует такая окрестность U_a точки a, что

$$|f(x)| > E \text{ при } x \in U_a \tag{2}$$

для всех допустимых значений аргумента x.

Если функция $f(x)$—бесконечно большая при $x \to a$, то условно пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty. \tag{3}$$

Пример. $\operatorname{tg} x \to \infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Записи

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

соответственно обозначают: $f(x) < -E$ при $x \in U_a$ и $f(x) > E$ при $x \in U_a$ ($E > 0$ произвольно и окрестность U_a зависит от E).

Легко доказывается следующее утверждение.

Лемма. 1) *Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $1/f(x) \to 0$ при $x \to a$; 2) если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ ($\alpha(x) \neq 0$* для *$x \neq a$), то $1/\alpha(x) \to \infty$ при $x \to a$.*

Замечание. Неограниченная функция может не быть бесконечно большой.

Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$, однако она не является бесконечно большой при $x \to 0$.

§ 8. Основные теоремы о бесконечно малых

Теорема 1. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$*[1]) *функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$.*

Доказательство. Для простоты ограничимся тремя функциями: $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$ и $\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$.

Рассмотрим их алгебраическую сумму

$$\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Тогда $\varepsilon/3$ также будет некоторым положительным числом.

В силу определения бесконечно малой существуют три, характеризуемые числом $\varepsilon/3$, окрестности U'_a, U''_a, U'''_a такие, что

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/3 \text{ при } x \in U'_a, \qquad (1)$$

$$|\beta(x)| < \varepsilon/3 \text{ при } x \in U''_a, \qquad (2)$$

$$|\gamma(x)| < \varepsilon/3 \text{ при } x \in U'''_a. \qquad (3)$$

Пересечение $U_a = U'_a \cap U''_a \cap U'''_a$ представляет собой окрестность точки a, в которой одновременно будут выполнены неравенства (1), (2) и (3). Таким образом,

$$|\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |-\gamma(x)| =$$

$$= |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

если $x \in U_a$ и $x \in X$. А это и значит, что

$$\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Теорема доказана.

В частности, *разность двух бесконечно малых при $x \to a$ функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$.*

Определение. *Говорят, что функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$, если она ограничена в некоторой окрестности U_a точки a.*

Теорема 2. *Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую при $x \to a$ функцию есть функция бесконечно малая при $x \to a$.*

Доказательство. Пусть

$$|f(x)| \leqslant M \quad (M > 0) \text{ при } x \in V_a,$$

---

[1]) Здесь и далее в этом параграфе мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции заведомо определены на некотором общем множестве X, для которого a является предельной точкой. Рассматриваемые значения x таковы, что $x \in X$.

где V_a — некоторая окрестность точки a и

$$\alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U_a \subset V_a$, что

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/M \text{ при } x \in U_a. \qquad (4)$$

Отсюда имеем

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)||\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

если $x \in U_a$. Таким образом, $f(x)\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Теорема 3. *Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала две функции $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$.

Полагая $0 < \varepsilon < 1$ и рассуждая так же, как в теореме 1, убеждаемся, что существует такая окрестность U_a, что

$$|\alpha(x)| < \varepsilon, \ |\beta(x)| < \varepsilon \text{ при } x \in U_a.$$

Отсюда

$$|\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot \varepsilon < \varepsilon, \text{ если } x \in U_a.$$

Следовательно, $\alpha(x)\beta(x) \to 0$ при $x \to 0$.

2) Если мы имеем, например, три функции $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$, то, используя первую часть доказательства, получаем $\alpha(x)\beta(x)\gamma(x) = [\alpha(x)\beta(x)]\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$.

Следствие. *Целая положительная степень $[\alpha(x)]^n$ бесконечно малой функции $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.*

Замечание. Что касается отношения двух бесконечно малых $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$, то оно может быть функцией произвольного поведения при $x \to a$.

Пример. Пусть $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x + x^2$, $\gamma(x) = x^2$. Здесь при $x \to 0$ имеем

$$\alpha(x) \to 0, \ \beta(x) \to 0, \ \gamma(x) \to 0;$$

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2 + x \to 2; \ \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x \to 0; \ \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \frac{1}{x} \to \infty.$$

С помощью действия деления можно сравнить между собой бесконечно малые.

Определение 1. *Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ имеет **одинаковый порядок** при $x \to a$,*

если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0.$$

Определение 2. *Говорят, что при $x \to a$ порядок бесконечно малой $\beta(x)$ выше порядка бесконечно малой $\alpha(x)$* (или, что то же самое, *порядок бесконечно малой $\alpha(x)$ ниже порядка бесконечно малой $\beta(x)$), если отношение $\beta(x)/\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$*, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

В этом случае пишут

$$\beta(x) = o[\alpha(x)] \text{ при } x \to a.$$

Определение 3. *Говорят, что бесконечно малая $\beta(x)$ имеет порядок n (n — натуральное число) относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to a$, если*

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)} = k \neq 0.$$

Если же $\beta(x) = o[\alpha^n(x)]$ при $x \to a$ (т. е. $k = 0$), то порядок $\beta(x)$ выше n по сравнению с $\alpha(x)$.

§ 9. Основные теоремы о пределах

Здесь мы также будем предполагать, что функции, рассматриваемые в каждой из следующих теорем, определены на некотором общем множестве X, для которого точка a является предельной точкой (точкой накопления).

Теорема 1. *Если каждое слагаемое алгебраической суммы конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел этой алгебраической суммы при $x \to a$ существует и равен такой же алгебраической сумме пределов слагаемых.*

Доказательство. Пусть, например, имеем алгебраическую сумму трех функций $f(x) + g(x) - h(x)$, где

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B, \quad \lim_{x \to a} h(x) = C.$$

Так как функции отличаются от своих пределов на бесконечно малые, то получаем

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x), \quad h(x) = C + \gamma(x), \qquad (1)$$

где $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$. Из равенств (1), используя теорему об алгебраической сумме бесконечно малых (§ 8, теорема 1), будем иметь

$$f(x)+g(x)-h(x)=(A+B-C)+[\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)], \quad (2)$$

где $\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$. Из равенства (2) вытекает, что сумма $f(x)+g(x)-h(x)$ отличается от числа $A+B-C$ на бесконечно малую и, следовательно **это число** является пределом данной суммы. Таким образом, имеем

$$\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)-h(x)] =$$
$$= A+B-C = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} h(x), \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Функция может иметь только один предел при $x \to a$.*

Действительно, если $f(x) \to A$ и $f(x) \to A'$ при $x \to a$, то на основании теоремы 1 получим

$$f(x)-f(x)=0 \to A-A' \text{ при } x \to a.$$

Так как предел постоянной функции равен самой функции и единствен (§ 3, теорема 1), то отсюда имеем $A-A'=0$, т. е. $A'=A$.

Замечание. В условии теоремы предполагалось, что каждая из функций имеет предел, и доказывалось, что и их сумма также имеет предел. Обратное, вообще говоря, не верно: из существования предела суммы не следует существования пределов слагаемых. Например, имеем

$$\lim_{x \to \infty} (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1,$$

тогда как $\lim\limits_{x \to \infty} \sin^2 x$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \cos^2 x$ не существуют, и поэтому здесь

$$\lim_{x \to \infty} (\sin^2 x + \cos^2 x) \neq \lim_{x \to \infty} \sin^2 x + \lim_{x \to \infty} \cos^2 x.$$

Таким образом, формулировка: предел суммы равен сумме пределов слагаемых, является нестрогой.

Аналогичное замечание следует иметь в виду для предела произведения (теорема 2) и предела частного (теорема 4).

Теорема 2. *Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел произведения при $x \to a$ равен произведению пределов сомножителей.*

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала произведение двух сомножителей $f(x)g(x)$, и пусть

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ и } \lim_{x\to a} g(x)=B.$$

Имеем

$$f(x)=A+\alpha(x),\quad g(x)=B+\beta(x), \tag{4}$$

где $\alpha(x)\to 0$ и $\beta(x)\to 0$ при $x\to a$. Отсюда получаем

$$f(x)g(x)=AB+\gamma(x), \tag{5}$$

где

$$\gamma(x)=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x). \tag{6}$$

Из основных теорем о бесконечно малых (§ 8, теоремы 1, 2, и 3) следует, что $\gamma(x)\to 0$ при $x\to a$. Поэтому на основании равенства (5) будем иметь

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=AB=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x). \tag{7}$$

2) Рассмотрим теперь, например, произведение трех функций $f(x)g(x)h(x)$, имеющих конечные пределы при $x\to a$. Используя первую часть доказательства, находим

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)h(x)]=\lim_{x\to a}\{f(x)[g(x)h(x)]\}=$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}[g(x)h(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)\lim_{x\to a} h(x).$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Действительно, если c есть постоянная функция, то

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=\lim_{x\to a} c\lim_{x\to a} f(x)=c\lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то предел при $x\to a$ целой положительной степени ее равен такой же степени предела этой функции*, т. е.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

(n — натуральное число).

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+10)(x+20)^2(x+30)^3}{x^6}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{10}{x}\right)\left(1+\frac{20}{x}\right)^2\left(1+\frac{30}{x}\right)^3\right]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{20}{x}\right)^2\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{30}{x}\right)^3=1\cdot 1\cdot 1=1.$$

Лемма. *Пусть $f(x) \to A \neq 0$ при $x \to a$. Тогда обратная по величине функция $1/f(x)$ ограничена в некоторой окрестности U_a точки a.*

Действительно, положим $\varepsilon = |A| > 0$. На основании определения предела функции имеем

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{|A|}{2} \quad \text{при} \quad x \in U_a$$

для всех допустимых значений x. Отсюда получаем

$$|f(x)| = |A - [A - f(x)]| \geqslant$$
$$\geqslant |A| - |A - f(x)| > |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2} > 0 \quad \text{при} \quad x \in U_a.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|},$$

если $x \in U_a$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, отличный от нуля, то предел при $x \to a$ обратной ей по величине функции $1/f(x)$ равен обратной величине предела данной функции*, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}. \tag{8}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \neq 0$. Тогда на основании леммы, учитывая, что произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая (§ 8, теорема 2), будем иметь

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot [A - f(x)] \to 0 \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}.$$

Теорема 4. *Если делимое $f(x)$ и делитель $g(x)$ имеют пределы при $x \to a$ и предел делителя отличен от нуля, то предел их частного (дроби) при $x \to a$ равен частному пределов делимого (числителя дроби) и делителя (знаменателя дроби)*, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. Тогда, используя теорему о пределе произведения (теорема 2) и теорему о пределе обратной величины функции (теорема 3), получим

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}.$$

Без доказательства приведем еще одну теорему.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$ и $\sqrt[n]{f(x)}$ (n — натуральное) существует в точке a и в некоторой ее окрестности U_a, то*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}. \qquad (10)$$

§ 10. Некоторые признаки существования предела функции

Не всякая функция имеет предел, даже будучи ограниченной. Например, $\sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет, хотя $|\sin x| \leqslant 1$.

Укажем два признака существования предела функции.

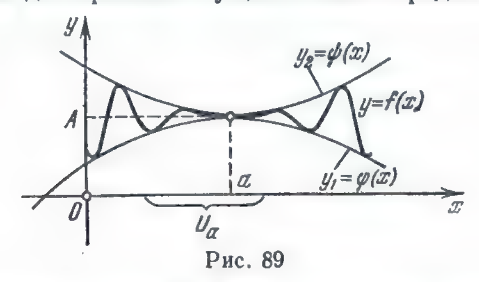


Рис. 89

Теорема о промежуточной функции. *Пусть в некоторой окрестности U_a точки a функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел A при $x \to a$* (рис. 89), *т. е.*

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \qquad (1)$$

и

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=A. \tag{2}$$

Тогда функция $f(x)$ имеет тот же предел:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A. \tag{3}$$

Доказательство. Из неравенства (1) имеем

$$\varphi(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant\psi(x)-A.$$

Отсюда

$$|f(x)-A|\leqslant\max(|\varphi(x)-A|,\quad|\psi(x)-A|). \tag{4}$$

На основании условия (2) для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность U_a, что

$$|\varphi(x)-A|<\varepsilon \text{ и } |\psi(x)-A|<\varepsilon \text{ при } x\in U_a. \tag{5}$$

Поэтому из неравенства (4) получаем

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ при } x\in U_a, \tag{6}$$

т. е. справедливо равенство (3).

Определение. 1) *Функция $f(x)$ называется возрастающей (не убывающей) на данном множестве X, если из неравенства $x_1<x_2$ (x_1, $x_2\in X$) вытекает неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)\leqslant f(x_2)$).*

2) *Функция $f(x)$* называется *убывающей (не возрастающей) на X, если из неравенства $x_1<x_2$ (x_1, $x_2\in X$) следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)\geqslant f(x_2)$).*

Возрастающая (не убывающая) или убывающая (не возрастающая) функция называется *монотонной* на данном множестве X.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x<a$ или при $x>a$. Тогда существует соответственно левый предел*

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$$

или правый предел

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0).$$

Несмотря на наглядность этой теоремы, доказательство ее не может быть здесь приведено.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для $a = -\infty$ или для $a = +\infty$.

Следствие. *Ограниченная монотонно возрастающая или монотонно убывающая последовательность* x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *имеет предел.*

Пример. Рассмотрим последовательность периметров $P_3, P_6, P_{12}, \ldots$ правильных n-угольников $(n=3, 6, 12, \ldots)$, вписанных в окружность радиуса R и получаемых в результате удвоения числа их сторон.

Легко убедиться, что

$$P_3 < P_6 < P_{12} < \ldots,$$

т. е. периметр P_n монотонно возрастает вместе с n. В то же время величина P_n ограничена, так как периметр каждого вписанного правильного n-угольника никогда не превышает периметра любого описанного многоугольника, в частности, например, периметра описанного квадрата, т. е. $P_n < 8R$.

Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C,$$

который принимается за длину окружности.

§ 11. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге

Теорема. *Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице*, т. е.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

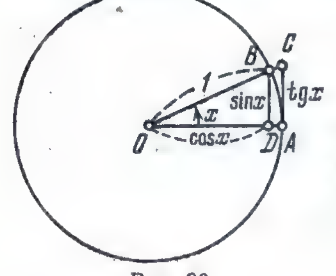


Рис. 90

Доказательство. 1) Пусть сначала $x > 0$; причем так как дуга x стремится к нулю, то можно считать, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

В тригонометрическом круге радиуса $R = 1$ построим угол $x = \angle AOB$ (рис. 90), и пусть DB — длина перпендикуляра, опущенного из точки B на радиус OA и AC — отрезок касательной к окружности, проведенной в точке A до точки пересечения ее с продолженным радиусом AB.

Очевидно, имеем

$$\text{пл. } \triangle OAB < \text{пл. сект. } OAB < \text{пл. } \triangle OAC.$$

Так как $DB = \sin x$ и $AC = \operatorname{tg} x$, то на основании формул элементарной геометрии получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

т. е.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Разделив все члены последнего двойного неравенства на положительную величину $\sin x$, будем иметь

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad (3)$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (4)$$

Пусть $x \to +0$; тогда из наглядных соображений получаем $\cos x \to 1$ [1]). Таким образом, из неравенства (4) следует, что функция $\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя функциями, имеющими общий предел, равный 1. На основании теоремы о промежуточной функции (§ 12) получаем

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (5)$$

2) Пусть теперь $x < 0$; имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (5')$$

Из формул (5) и (5′), очевидно, вытекает равенство (1) (см. § 4, замечание 5).

Замечание. Из формул (2) вытекает, что если $0 < |x| < \pi/2$, то

$$|\sin x| = \sin|x| < |x|.$$

Отсюда, так как $|\sin x|$ не превосходит 1, то при любом x справедливо неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|, \qquad (6)$$

---

[1]) Действительно, так как в силу (2) $|\sin x| \leqslant |x|$ $(|x| < \pi/2)$, то синус бесконечно малой дуги есть бесконечно малая. Отсюда $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \to 0$ при $x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

причем равенство имеет место лишь при $x=0$. Неравенство (6) часто используется для оценки синусов малых дуг.

§ 12. Число e

Рассмотрим выражение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где n — натуральное число.

Будем давать n неограниченно возрастающие значения и вычислять соответствующие значения степени $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Получим следующую таблицу:

n	1	2	10	100	1 000	10 000	...
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718	...

Мы видим, что с возрастанием n степень $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ изменяется все медленнее и медленнее и, по-видимому, стремится к некоторому пределу, приближенно равному 2,718. Докажем, что это действительно так.

Теорема. *Последовательность*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

стремится к конечному пределу, заключенному между 2 *и* 3.

Доказательство. Пользуясь биномом Ньютона (см. гл. XI, § 5), будем иметь

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$
$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

При $n>1$ все слагаемые в формуле (1) положительны, причем с возрастанием показателя n увеличивается число слагаемых и каждое соответствующее слагаемое становится больше.

Следовательно, последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, начиная с наименьшего значения, равного 2, растет вместе с показателем n.

С другой стороны, очевидно, каждое слагаемое в правой части формулы (1) увеличится, если все множители знаменателей заменить на двойки, а каждую из скобок заменить единицей. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

В силу известной формулы для суммы геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Таким образом, члены последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n постоянно возрастают, оставаясь больше 2, но меньше 3.

Следовательно, на основании следствия к теореме из § 10 существует конечный предел этой последовательности, очевидно, принадлежащий отрезку [2, 3] (см. § 3, теорема 2). Этот предел является иррациональным числом и обозначается буквой e[1]). Итак,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенное значение этого числа есть $e=2{,}7182818284$.

Можно доказать, что функция

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty))$$

при $x\to\infty$ стремится к числу e:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

[1]) Обозначением числа e и его широким применением во многих вопросах математики мы обязаны петербургскому академику Эйлеру.

Дадим другое выражение для числа e. Полагая $\frac{1}{x}=\alpha$ $(\alpha>-1)$, будем иметь

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

С помощью числа e удобно выражать многие пределы.

Пример 1. Найти $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Полагая $\frac{2}{x}=\alpha$, будем иметь

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2/\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^2=e^2.$$

Показательная функция вида

$$y=e^x, \qquad (2)$$

где $e=2{,}71828\ldots$, называется *экспоненциальной*; употребляется также обозначение

$$e^x=\exp x.$$

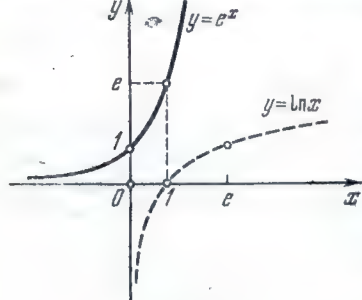


Рис. 91

График функции (2) изображен на рис. 91. Экспоненциальная функция играет важную роль в математическом анализе и его приложениях.

Пример 2. Пусть некоторая химическая реакция протекает так, что в каждый момент времени t скорость образования вещества пропорциональна количеству этого вещества, имеющемуся в наличности в данный момент времени.

Обозначим через Q_0 начальное количество этого вещества (т. е. количество вещества в момент времени $t=0$). Промежуток времени $(0, t)$ разобьем на n мелких промежутков:

$$\left(0, \frac{t}{n}\right), \left(\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right), \ldots, \left(\frac{(n-1)t}{n}, \frac{nt}{n}\right).$$

Если в течение каждого из этих весьма малых промежутков скорость реакции считать постоянной, то количества вещества в моменты времени

$$\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \ldots, \frac{nt}{n}=t$$

соответственно будут равны

$$Q_1 = Q_0 + kQ_0 \cdot \frac{t}{n} = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right),$$

$$Q_2 = Q_1 + kQ_1 \cdot \frac{t}{n} = Q_1 \left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^2,$$

. . . .

$$Q_n = Q_{n-1} + kQ_{n-1} \frac{t}{n} = Q_{n-1} \left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n,$$

где k — данный коэффициент пропорциональности (*закон сложных процентов*). Но согласно условию задачи прирост количества вещества происходит непрерывно. Поэтому, чтобы получить точную формулу, нужно предположить, что число наших промежутков неограниченно возрастает, а каждый из них стремится к нулю.

Отсюда, считая, что $\frac{t}{n} \longrightarrow 0$, для количества вещества Q в момент времени t будем иметь такую формулу:

$$Q = \lim_{n \to \infty} \left[Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n \right].$$

Этот предел легко выразить через число e. В самом деле, введя обозначение $\frac{kt}{n} = \alpha$, где $\alpha \longrightarrow 0$, получим

$$Q = Q_0 \lim_{\alpha \to 0} \left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{kt}$$

т. е.

$$Q = Q_0 e^{kt}. \qquad (3)$$

Это и есть закон, по которому происходит рост вещества в наших условиях.

Формула вида (3) встречается при изучении целого ряда процессов, как-то: распада радия (здесь $k < 0$), размножения бактерий и т. п. Отсюда ясно, какую важную роль играет число e в математическом анализе и его приложениях.

§ 13. Понятие о натуральных логарифмах

Если основание логарифмов равно числу e, то логарифмы называются *натуральными* или *неперовыми* [1]) и обозначаются так:

$$\log_e x = \ln x.$$

В высшей математике употребляются почти исключительно натуральные логарифмы, так как многие формулы для них, как мы увидим ниже, оказываются более простыми, чем для логарифмов других систем [2]).

---

[1]) По имени шотландского математика Непера — изобретателя логарифмов.

[2]) Кроме того, в приложениях часто встречаются показательные закономерности вида (3) из предыдущего параграфа; в связи с этим более удобно пользоваться логарифмами при основании e.

Выведем соотношения между натуральным логарифмом числа и логарифмом этого числа при основании a ($a>0$, $a\neq 1$). Пусть мы имеем

$$y=\log_a x;$$

отсюда

$$a^y=x.$$

Логарифмируя это равенство при основании e, находим

$$y\ln a=\ln x.$$

Отсюда

$$y=\frac{1}{\ln a}\ln x,$$

или

$$\log_a x=\frac{1}{\ln a}\ln x. \qquad (1)$$

Эта формула выражает логарифм числа x при основании a через натуральный логарифм этого числа.

Заметим, что, полагая $x=e$ в формуле (1), имеем

$$\log_a e=\frac{1}{\ln a}\ln e=\frac{1}{\ln a},$$

Полагая в формуле (1) $a=10$, получим

$$\lg x=\log_{10} x=M\ln x, \qquad (2)$$

где $M=\frac{1}{\ln 10}=\lg e=0{,}43429$ — *модуль перехода* (от натуральных логарифмов к десятичным).

Обратно, из формулы (2) находим

$$\ln x=\frac{1}{M}\lg x, \qquad (3)$$

где $\frac{1}{M}=\ln 10=2{,}30258$.

§ 14. Понятие об асимптотических формулах

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции, определенные в окрестности точки a.

Обобщая определение § 8, будем говорить, что

$$\psi(x)=o(\varphi(x)) \text{ при } x\to a, \qquad (1)$$

если

$$\psi(x)=\alpha(x)\varphi(x), \qquad (2)$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Если $\varphi(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то из (2) имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0 \tag{3}$$

(ср. § 8).

Определение. *Если при $x \to a$ справедливо равенство*

$$f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)), \tag{4}$$

то $\varphi(x)$ называют **асимптотическим членом** *(или асимптотическим выражением) для функции $f(x)$ при $x \to a$.*

Употребляется запись: $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to a$. Если $\varphi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, то из формулы (4) получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1. \tag{5}$$

Выясним условия существования для функции $f(x)$ ненулевого линейного асимптотического члена:

$$\varphi(x) = kx + b \text{ при } x \to \infty. \tag{6}$$

Пусть

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{7}$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \infty$, т. е. $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to \infty$, причем, очевидно, также $\alpha(x) = o(kx + b)$ при $x \to \infty$.

Из (7) будем иметь

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}. \tag{8}$$

Переходя к пределу при $x \to \infty$ в равенстве (8) и учитывая, что $\frac{\alpha(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, получим

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{9}$$

Из формулы (7) находим

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]. \tag{10}$$

Обратно, если существуют пределы (9) и (10), из которых хотя бы один ненулевой, то справедливо асимптотическое разложение (7). Действительно, из формулы (10),

где k определяется равенством (9), имеем

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0.$$

Отсюда непосредственно вытекает формула (7).

График линейного асимптотического члена $y=kx+b$ называется *асимптотой* кривой $y=f(x)$ (рис. 92); причем

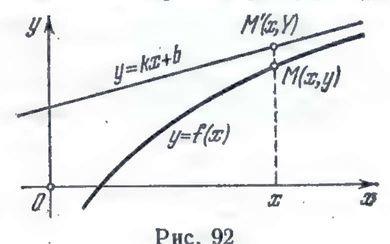


Рис. 92

случай $k=0$, $b=0$ не исключается. Здесь для точек $M(x, y)$ на кривой и $M'(x, Y)$ на асимптоте $Y-y=MM'\to 0$ при $x\to\infty$ [1]).

Пример. Построить при $x\to+\infty$ линейную асимптотическую формулу для функции $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

Используя формулы (9) и (10), имеем:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

и

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{x^2+x+1}\sim x+\frac{1}{2}\text{ при } x\to+\infty.$$

Упражнения

1. На числовой оси построить множества точек, определяемых неравенствами: а) $|x+2|<1$; б) $|x-3|\geqslant 3$; в) $0<|x-1|<1/2$; г) $1\leqslant|x|\leqslant 2$.

---

[1]) Если пределы (9) и (10) существуют при $x\to-\infty$ или при $x\to+\infty$, то асимптотическая формула (7) верна при соответствующих условиях. В этом случае график функции $y=f(x)$ имеет левую асимптоту или соответственно правую асимптоту.

2. При определении массы тела был получен приближенный результат $p=2{,}57$ г с абсолютной погрешностью $\Delta_0 \leqslant 0{,}01$ г. Определить предельную относительную погрешность δ числа p.

3. Сколько верных цифр имеет приближенное число $x=35{,}719$, если относительная погрешность его $\delta_0 \leqslant 1\%$?

Найти пределы:

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000x}{1+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 9. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

11. Выяснить поведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

если коэффициент $a \longrightarrow 0$, а коэффициенты $b \neq 0$ и c постоянны.

12. Пусть $y_1=x$ и $y_2=\sqrt{x^2+1}$. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(y_2-y_1)=0$. Выяснить геометрический смысл этого равенства.

Найти пределы:

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$. 14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$. 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$. 17. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$. 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

ГЛАВА VIII

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. Приращения аргумента и функции. Непрерывность функции

Пусть x есть некоторое значение данной переменной величины. Наряду с x рассмотрим другое значение x_1 этой переменной величины. Введем следующее определение.

Определение. *Приращением некоторой переменной величины называется разность между новым значением этой величины и ее прежним значением*, т. е. в нашем случае приращение переменной величины равно $x_1 - x$.

Для обозначения приращения используется греческая буква Δ; так, например, $\Delta x = x_1 - x$ обозначает приращение величины x.

Прибавляя к значению переменной величины ее приращение, получим *приращенное значение* этой величины. Например, $x + \Delta x$ есть приращенное значение величины x.

Предположим, что y есть некоторая функция от аргумента x, т. е.

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Дадим аргументу x приращение Δx; тогда y получит соответствующее приращение Δy. Этот факт, очевидно, можно записать так:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (3)$$

Пример 1. Определить приращение аргумента x и приращение функции $y = x^3$, если аргумент x изменился от -1 до 2.

Здесь, очевидно, $\Delta x = 2 - (-1) = 3$ и $\Delta y = 2^3 - (-1)^3 = 9$.

Понятие приращения функции поясним геометрически. Пусть кривая AB есть график функции $y = f(x)$ (рис. 93).

Рассмотрим на этой кривой точку M с текущими координатами x и y. Дадим абсциссе x точки $M(x, y)$ приращение Δx, тогда ордината ее y получит приращение Δy. Точка $M(x, y)$ займет при этом положение $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Пусть C есть точка пересечения прямой, проходящей через точку M и параллельной оси Ox, и перпендикуляра $M'N'$, опущенного из точки M' на ось Ox. Очевидно, что

$$MC=\Delta x, \quad CM'=\Delta y.$$

Рис. 93

Может случиться, что для некоторого x при стремлении Δx к нулю точка M' неограниченно приближается к точке M и, следовательно, Δy также стремится к нулю. В таком случае функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* при данном значении x. Более точно:

Определение 1. *Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется непрерывной при $x=x_1$ (или непрерывной в точке x_1), если:*

1) *функция определена при $x=x_1$* (т. е. $x_1 \in X$);

2) *приращение функции в точке x_1 стремится к нулю, когда приращение аргумента $\Delta x_1 = x - x_1$ стремится к нулю*, т. е.

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} [f(x_1+\Delta x_1)-f(x_1)]=0, \tag{4}$$

где бесконечно малое приращение Δx_1 пробегает лишь те значения, для которых $f(x_1+\Delta x_1)$ имеет смысл. При этом мы, как всегда, предполагаем (см. гл. VII, § 3), что x_1 является предельной точкой множества X и, таким образом, в любой окрестности U_{x_1} найдутся точки $x_1 + \Delta x_1 \in X$, отличные от x_1 ($\Delta x_1 \neq 0$), для которых функция $f(x)$ определена.

Короче говоря, *функция называется непрерывной в данной точке, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Используя понятие предела функции (гл. VII, § 3), получаем развернутое определение непрерывности функции в точке: *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1 тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon, x_1) > 0$ *такое, что*

$$|f(x)-f(x_1)|=|f(x_1+\Delta x_1)-f(x_1)|<\varepsilon, \tag{5}$$

если $x = x_1 + \Delta x_1$ *и* $0 < |\Delta x_1| < \delta$ (Δx_1 — любое допустимое приращение). Заметим, что неравенство (5), очевидно, выполнено и при $\Delta x_1 = 0$, т. е. здесь δ-окрестность точки x_1 можно трактовать как полную: $|\Delta x_1| < \delta$.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на данном множестве X, если 1) она определена на этом множестве (т. е. $\forall x \in X\ \exists f(x)$); 2) непрерывна в каждой точке этого множества, т. е. $\forall x \in X$ справедливо равенство*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0, \quad (6)$$

где $x + \Delta x \in X$.

Заметим, что здесь множество X трактуется как область определения функции, т. е. точки $x \notin X$ и $x + \Delta x \notin X$ не рассматриваются.

Например, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если: 1) эта функция определена в каждой точке этого отрезка, 2) $\forall x \in [a, b]$ справедливо равенство (6), где $x + \Delta x \in [a, b]$.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in [0, 1], \\ 0 \text{ при } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $X = [0, 1]$, хотя она не является непрерывной на оси $-\infty < x < +\infty$.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2$. Давая аргументу x приращение Δx, получим

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

где Δy — приращение функции y. Отсюда

$$\Delta y = \Delta x \cdot (2x + \Delta x).$$

Очевидно, каково бы ни было фиксированное значение x, если Δx бесконечно мало, то Δy также будет бесконечно малым. Следовательно, функция x^2 непрерывна при любом значении аргумента x. Иными словами, x^2 является непрерывной функцией в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Легко также доказать непрерывность степенной функции x^n, где n — натуральное постоянное число.

Определение 3. *Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется точкой разрыва этой функции.*

Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то возможны два случая:

1) функция $f(x)$ определена при $x=x_0$, причем

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0) \not\to 0$$

при $\Delta x_0 = x - x_0 \to 0$;

2) функция $f(x)$ не определена при $x=x_0$ и говорить о приращении функции в точке x_0 не имеет смысла. В этом случае условимся $x=x_0$ называть точкой разрыва функции $f(x)$ только тогда, когда функция $f(x)$ определена в непосредственной близости значения x_0 [1]).

Если можно изменить или дополнительно определить функцию $f(x)$ в точке x_0 (т. е. выбрать число $f(x_0)$) так,

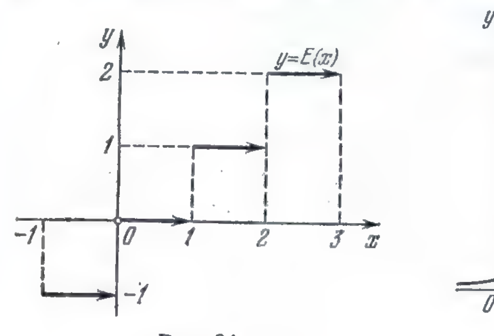


Рис. 94

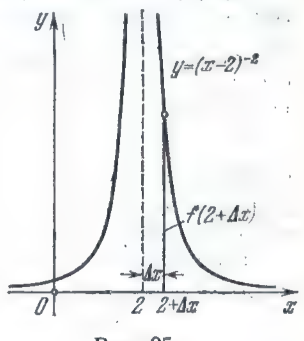


Рис. 95

что измененная или пополненная функция $f(x)$ будет непрерывна при $x=x_0$, то эта точка называется *устранимой точкой разрыва* функции $f(x)$. В противном случае, т. е. когда функция $f(x)$ остается разрывной при $x=x_0$ при любом выборе числа $f(x_0)$, значение x_0 называется *неустранимой точкой разрыва функции* $f(x)$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $E(x)$, равную целой части числа x, т. е. если $x=n+q$, где n — целое число и $0 \leqslant q < 1$, то $E(x)=n$ (рис. 94). Например, $E(\sqrt{2})=1$, $E(\pi)=3$, $E(-1{,}5)=-2$ и т. д.

Функция $E(x)$ разрывна при каждом целочисленном значении аргумента x. В самом деле, например, при $x=1$ и достаточно малом Δx имеем

$$E(1+\Delta x)=1, \quad \text{если} \quad \Delta x > 0,$$

и

$$E(1+\Delta x)=0, \quad \text{если} \quad \Delta x < 0.$$

Отсюда, приняв во внимание, что $E(1)=1$, получим

$$E(1+\Delta x) - E(1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

---

[1]) То есть при любом $\varepsilon > 0$ в интервале $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ найдутся точки, где функция $f(x)$ определена.

Следовательно, приращение функции $\Delta y = E(1+\Delta x) - E(1)$ не стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, и поэтому функция разрывна при $x=1$.

Аналогичное рассуждение можно провести для каждого из значений $x=k$, где k — целое число. Итак, точки $x=k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — неустранимые точки разрыва функции $E(x)$.

Пример 5. Пусть $f(x) = 1/(x-2)^2$.

Эта функция не определена при $x=2$, но имеет смысл для всех значений $x \neq 2$ (рис. 95). Какое бы значение мы ни приписали числу $f(2)$, всегда будем иметь

$$f(2+\Delta x) - f(2) = \frac{1}{(\Delta x)^2} - f(2) \longrightarrow \infty$$

при $\Delta x \to 0$. Таким образом, здесь при $x=2$ при любом выборе значения $f(2)$ бесконечно малому приращению Δx аргумента соответствует бесконечно большое приращение Δy функции. Следовательно, эта функция имеет неустранимую точку разрыва при $x=2$.

§ 2. Другое определение непрерывности функции

Ввиду важности понятия непрерывности функции дадим другое определение непрерывности в точке, эквивалентное приведенному выше.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = x_1$, если:* 1) *эта функция определена при $x = x_1$;* 2) *имеет место равенство*

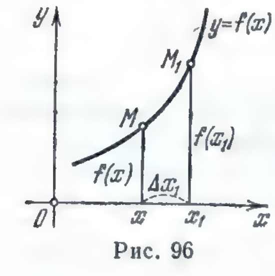


Рис. 96

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)\,^{1)}, \qquad (1)$$

т. е. *функция непрерывна в данной точке x_1 тогда и только тогда, когда предел функции при $x \to x_1$ равен значению функции в предельной точке* (рис. 96). Здесь, понятно, предполагается, что переменная x принимает лишь те значения, для которых $f(x)$ имеет смысл. Иными словами, для функции $f(x)$, непрерывной при значении x_1, из того обстоятельства, что $x \to x_1$, вытекает предельное соотношение

$$f(x) \to f(x_1).$$

Легко видеть, что: 1) если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_1$ в указанном ранее (§ 1) смысле, т. е. если

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} [f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)] = 0, \qquad (2)$$

[1]) Здесь, как обычно, предполагается, что x_1 есть предельная точка области определения функции $f(x)$.

то, полагая $x_1 + \Delta x_1 = x$, где, очевидно, $x \to x_1$ при $\Delta x_1 \to 0$, и пользуясь теоремой о пределе алгебраической суммы, получим

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1). \qquad (3)$$

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна также при $x = x_1$ и в нашем новом смысле.

2) Очевидно, что, и обратно, из равенства (3) вытекает равенство (2).

Таким образом, эквивалентность двух определений полностью доказана.

Для функции, непрерывной на множестве X, в силу формулы (1) для каждого значения $x_1 \in X$ выполнено равенство

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Так как $x_1 = \lim\limits_{x \to x_1} x$, то отсюда получаем

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_1} x\right), \qquad (4)$$

т. е. *если функция непрерывна, то знаки предела и функции перестановочны.*

В подробных курсах анализа доказывается, что формула (4) остается верной для любой непрерывной функции $x = \varphi(t)$ такой, что $\varphi(t) \to x_1$ при $t \to t_1$. Таким образом, имеем усиленное свойство перестановочности функции и предела:

$$\lim_{t \to t_1} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \to t_1} \varphi(t)\right). \qquad (5)$$

Из определения 3 (§ 1) вытекает, что *функция разрывна в данной точке тогда и только тогда, когда или* 1) *не существует предела функции в этой точке, или же* 2) *предел функции в данной точке существует, но он не совпадает со значением функции в этой точке.*

§ 3. Непрерывность основных элементарных функций

1) Степенная функция

$$y = x^n$$

(n — натуральное (см. рис. 60)) непрерывна при любом значении x (см. § 1, пример 2).

2) Показательная функция

$$y=a^x \quad (a>0)$$

(см. рис. 63) непрерывна при любом значении x[1]).

3) Тригонометрическая функция

$$y=\sin x$$

(см. рис. 65) непрерывна при каждом значении x.

В самом деле, давая аргументу x приращение Δx и обозначая через Δy соответствующее приращение функции y, будем иметь $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$; отсюда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

В силу замечания к теореме из § 11 гл. VII при $\Delta x\neq 0$ имеем

$$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<\frac{|\Delta x|}{2};$$

кроме того,

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1.$$

Поэтому

$$|\Delta y|<2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}\cdot 1=|\Delta x|, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Следовательно, функция $\sin x$ непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Совершенно так же доказывается, что

$$y=\cos x$$

есть непрерывная функция в интервале $(-\infty, +\infty)$ (см. рис. 65).

§ 4. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1. *Сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная*[2]).

Доказательство. В самом деле, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, непрерывные на некотором множестве X,

---

[1]) Доказательство этого факта см., например, в книге Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I.

[2]) Предполагается, что все рассматриваемые функции определены и непрерывны на некотором общем множестве X (например, на интервале (a, b) или отрезке $[a, b]$ и т. п.).

и x_1 — любое значение из этого множества, то

$$\lim_{x \to x_1} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to x_1} f_1(x) + \lim_{x \to x_1} f_2(x) = f_1(x_1) + f_2(x_1),$$

т. е. предел суммы при $x \to x_1$ равен значению этой суммы при $x = x_1$.

Следовательно, функция $f_1(x) + f_2(x)$ также непрерывна на множестве X.

Теорема 2. *Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Доказательство аналогичное.

Следствие. *Целый полином*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

есть функция непрерывная.

Теорема 3. *Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых делитель отличен от нуля.*

Доказательство аналогичное.

Следствие. *Дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

непрерывна всюду, за исключением тех значений x, где знаменатель обращается в нуль.

Теорема 4. *Непрерывная функция от непрерывной функции есть функция также непрерывная*; иначе говоря, сложная функция, состоящая из непрерывных функций, непрерывна.

Доказательство. Пусть x_1 — произвольная точка области определения сложной функции $f(\varphi(x))$, причем функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_1, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_1 = \varphi(x_1)$. На основании усиленного свойства перестановочности непрерывной функции и предела (§ 1) имеем

$$\lim_{x \to x_1} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_1} \varphi(x)\right) = f(\varphi(x_1)),$$

т. е. сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_1.

В силу теоремы 4, например, функции $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ и $\sin(x^2)$ непрерывны вследствие непрерывности функций x^2 и $\sin x$.

Функции, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, непрерывны всюду, кроме, быть может, отдельных значений аргумента.

Например, функция

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(см. рис. 66) в силу теоремы 3 настоящего параграфа непрерывна для всех значений аргумента x, кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = (2k-1)\pi/2$, где k — любое целое число.

Аналогично, функция

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(см. рис. 66) непрерывна при $\sin x \neq 0$, т. е. при $x \neq k\pi$ (k — целое).

Справедлива теорема о непрерывности обратной функции, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 5. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна*[1]) *на промежутке $\langle a, b \rangle$, то существует однозначная обратная функция $x = \varphi(y)$, определенная на промежутке $\langle f(a), f(b) \rangle$, причем последняя также непрерывна и монотонна в том же смысле.*

В силу этой теоремы: радикал $\sqrt[n]{x}$ (n — натуральное) (см. рис. 62), логарифмическая функция $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (см. рис. 64), главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ (см. рис. 67—70) непрерывны при всяком значении аргумента x, при котором эти функции определены.

§ 5. Раскрытие неопределенностей

Может случиться, что функция $f(x)$ определена и непрерывна всюду, за исключением некоторого значения $x = x_1$, при котором функция $f(x)$ теряет смысл (становится неопределенной). Возникает вопрос: нельзя ли так выбрать число $f(x_1)$, чтобы дополненная функция $f(x)$ была непрерывна при $x = x_1$.

В силу предыдущего для этого необходимо и достаточно выполнение равенства

$$f(x_1) = \lim_{x \to x_1} f(x).$$

Операция нахождения предела функции $f(x)$ при $x \to x_1$ в этом случае называется *раскрытием неопределенности*,

---

[1]) То есть $f(x)$ или строго возрастает, или строго убывает на $\langle a, b \rangle$.

а сам предел $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$, если он существует, носит не совсем удачное название *истинного значения функции* $f(x)$ при $x = x_1$.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Эта функция теряет смысл при $x = 2$. Полагая дополнительно

$$f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4,$$

получим функцию, непрерывную всюду, в том числе и при $x = 2$. Если же положить $f(2) \neq 4$, то соответствующая функция будет разрывна при $x = 2$ (рис. 97).

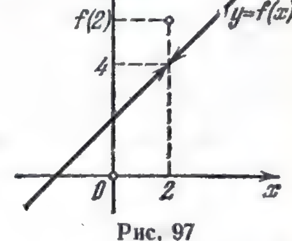


Рис. 97

Пример 2. Функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

не определена при $x = 0$. Полагая дополнительно

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

мы получим функцию, определенную и непрерывную для всех значений аргумента x.

§ 6. Классификация точек разрыва функции

Точка x_0 разрыва функции $f(x)$ называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы функции (§ 4) (рис. 87):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

(при этом функция $f(x)$ не обязательно должна быть определена в точке x_0, т. е. $f(x_0)$ может не существовать).

Величина

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

Все прочие точки разрыва x_1 функции $f(x)$ называются ее *точками разрыва второго рода*. Среди них важ-

ное значение имеют точки *бесконечного разрыва* x_1, для которых существуют (конечные или бесконечные) односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_1 + 0} f(x)$$

и хотя бы один из них является бесконечным (см., например, рис. 98).

В этом случае, прямая $x = x_1$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

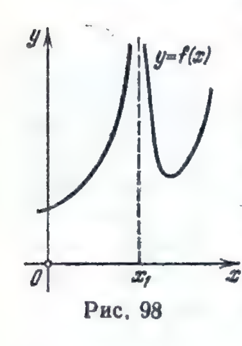


Рис. 98

Функция, допускающая на данном промежутке лишь точки разрыва первого рода в конечном числе, называется *кусочно непрерывной* на этом промежутке. Заметим, что в точках разрыва кусочно непрерывная функция может быть не определена.

Отметим, что для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Пример. Определить характер точки разрыва $x_0 = 0$ функции

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}.$$

Здесь мы имеем

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \pi \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = 0.$$

Следовательно, $x_0 = 0$ есть точка разрыва первого рода.

Упражнения

1. Определить приращение аргумента x и приращение функции $y = \lg x$, если аргумент x изменился от 10 до 100.
2. Показать, что для линейной функции $y = ax + b$ приращение Δy не зависит от x.
3 Доказать непрерывность функции $y = \sqrt{x}$.
4. Доказать, что функция $y = |x|$ непрерывна.

Определить точки разрыва функций:

5. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 6. $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

7. $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$.

Найти «истинное значение» функций:

8. $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ при $x=1$. 9. $f(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$ при $x=4$.

10. $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ при $x=0$.

11. Определить точки разрыва данных функций и выяснить характер этих точек: а) $\frac{\sqrt{\sin(x^2)}}{x}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$; в) $\sin\frac{\pi}{x}$.

ГЛАВА IX

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. Задача о касательной

Пусть M — фиксированная точка данной непрерывной кривой K (рис. 99). Рассмотрим секущую MM', проходящую через точку M. Может случиться, что когда точка M' по кривой неограниченно приближается к точке M, секущая MM' стремится к некоторому предельному положению MT, т. е. угол $\gamma = \angle M'MT \to 0$ при $M' \to M$. Тогда предельная прямая MT называется *касательной*.

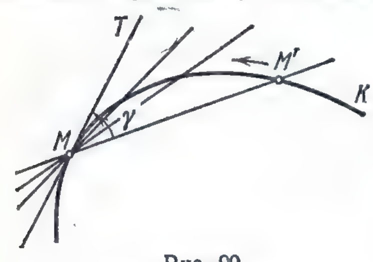


Рис. 99

Определение. *Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке M (точка касания) называется предельное положение секущей MM', проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M' неограниченно приближается по кривой к первой.*

Если секущая MM' при $M' \to M$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной линии в точке M не существует.

Покажем теперь, как находится уравнение касательной по заданному уравнению линии.

Задача. *Зная уравнение непрерывной линии*

$$y = f(x),$$

найти уравнение касательной в данной ее точке $M(x, y)$, предполагая, что касательная существует.

Наряду с точкой $M(x, y)$ возьмем на нашей линии другую точку $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (рис. 100). Проведя секущую MM' и прямые $MN \parallel Ox$ и $M'N \parallel Oy$, получим прямоугольный треугольник MNM' с катетами $MN = \Delta x$ и $NM' = \Delta y$.

Пусть секущая MM' составляет с положительным направлением оси Ox угол φ; тогда, очевидно, $\angle NMM' = \varphi$. Из прямоугольного треугольника MNM' определяем угловой коэффициент секущей

$$k' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

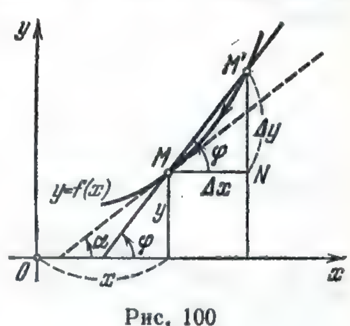


Рис. 100

Пусть теперь $M' \to M$; тогда, очевидно, $\Delta x \to 0$ и секущая MM' стремится к своему предельному положению — касательной MT в точке M (мы предполагаем, что касательная существует). Обозначим через α угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси Ox. При $\Delta x \to 0$ будем иметь: $\varphi \to \alpha$ и если касательная MT не перпендикулярна оси Ox, то в силу непрерывности тангенса получим

$$\operatorname{tg} \varphi \to \operatorname{tg} \alpha,$$

отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (1), найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ касательной MT:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Предел, стоящий в правой части равенства (2), называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x и сокращенно обозначается следующим образом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \qquad (3)$$

(y' читается: «игрек штрих»).

Таким образом, *угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению ее производной в точке касания*, т. е.

$$k = f'(x). \qquad (4)$$

Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение. Касательная MT проходит через точку касания $M(x, y)$; поэтому ее уравнение (см. гл. III, § 3) имеет вид

$$Y - y = k(X - x),$$

где X и Y — текущие координаты. Подставляя сюда значение углового коэффициента k и учитывая, что точка M лежит на линии, получим уравнение касательной к этой линии

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x). \qquad (5)$$

Замечание 1. Если обозначить для ясности координаты точки касания через (x_1, y_1), а текущие координаты, как обычно, через (x, y), то *уравнение касательной* к линии $y = f(x)$ в точке $M_1(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1), \qquad (5')$$

где $y_1 = f(x_1)$ и $y_1' = f'(x_1)$.

Замечание 2. При выводе мы предполагали, что касательная MT к линии $y = f(x)$ в точке M существует. Обратно, легко показать, что если для функции $y = f(x)$ существует в точке x конечная производная, т. е. предел (3) (такая функция называется *дифференцируемой в точке* x), то график этой функции в соответствующей точке имеет касательную (5), не параллельную оси Oy.

§ 2. Задача о скорости движения точки

К понятию производной приводит также задача о вычислении скорости неравномерного движения.

Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox (рис. 101). Каждому



Рис. 101

значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t:

$$x = f(t).$$

Это уравнение называется *уравнением движения*; оно выражает закон движения точки.

Задача. *Зная закон движения, найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, причем $OM = x$. В момент

$t+\Delta t$ точка займет положение M', где $OM'=x+\Delta x$. Отсюда $x+\Delta x=f(t+\Delta t)$. Следовательно, перемещение точки M за время Δt будет

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t). \tag{1}$$

Если точка M в течение промежутка времени $[t,\ t+\Delta t]$ двигалась в одном направлении, то Δx численно представляет собой путь, пройденный точкой за время Δt [1]). Отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

выражает среднюю скорость изменения абсциссы x за промежуток времени Δt, обычно называемую *средней скоростью движения* точки. Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения* в данный момент времени t. Обозначая эту скорость через v, получим

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

По аналогии с задачей о касательной (§ 1) можно сказать, что полученное выражение (3) представляет собой производную функции x по переменной t, т. е.

$$v=f'(t).$$

Таким образом, *скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени* [2]).

Замечание. Заметим, что если $v=f'(t)$ сохраняет постоянный знак в некотором промежутке $a<t<b$, то можно доказать (см. гл. XI, § 2), что для любого момента $t\in(a,\ b)$ в течение достаточно малого промежутка $[t,\ t+\Delta t]$ точка движется в одном и том же направлении. Таким образом, Δx представляет собой путь, пройденный точкой, и приведенная выше формулировка локально (т. е. для достаточно малого промежутка времени) является точной.

Если же для некоторого момента времени t_1 имеем $f'(t_1)=0$, т. е. при бесконечно малом промежутке времени $\Delta t_1=t-t_1$ соответствующее перемещение точки Δx является бесконечно малой более высокого порядка, то Δx, вообще говоря, не является прой-

---

[1]) В общем случае перемещение точки и путь, пройденный точкой, различны. Например, если первую секунду от начала движения точка передвинулась на 10 м вправо, а в следующую секунду — на 10 м влево, то перемещение точки за промежуток времени $\Delta t=2$ с равно $\Delta x=0$, тогда как пройденный путь $s=20$ м.

[2]) Точнее: *скорость есть производная абсциссы движущейся точки по времени.*

денным путем. Например, такая ситуация имеет место, когда точка совершает быстро затухающие колебания около своего положения равновесия. В этом случае формула (3) не адекватна нашему определению.

§ 3. Общее определение производной

Рассмотрение задач о касательной и скорости движения исторически привело к понятию **производной**, являющемуся одним из основных понятий высшей математики. При решении этих задач нам, в сущности, приходилось проделывать одну и ту же операцию: находить предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

Сейчас мы разберем этот вопрос в общем виде.

Для простоты мы сначала будем предполагать, что рассматриваемая функция $y=f(x)$ определена на некотором конечном или бесконечном интервале $X=(a, b)$ и непрерывна на этом интервале. Пусть $x \in (a, b)$ — некоторая фиксированная точка интервала (a, b). Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x+\Delta x \in (a, b)$, тогда функция y получит соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x). \qquad (1)$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Это отношение показывает, во сколько раз на данном промежутке $[x, x+\Delta x]$ приращение функции y больше приращения аргумента x; иными словами, оно дает **среднюю скорость изменения функции y относительно аргумента x** на промежутке $[x, x+\Delta x]$.

Пусть $\Delta x \to 0$; тогда и $\Delta y \to 0$ (в силу непрерывности функции y). Обозначим через $X_1 \subset (a, b)$ множество точек интервала (a, b), для которых имеет смысл предельный переход

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Тогда формула

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (x \in X_1) \qquad (4)$$

определяет некоторую функцию $y' = f'(x)$, носящую название *производной* функции $f(x)$.

Определение. *Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции к*

приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует.

Таким образом, производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, произведенная (т. е. полученная по определенным правилам) из данной функции.

Функция, имеющая производную на множестве X_1, называется *дифференцируемой* на этом множестве (см. гл. XII).

Если $x \in X_1$ фиксировано, то в силу (4) *производная y' представляет собой скорость изменения функции y относительно аргумента x в точке x.*

Для обозначения производной данной функции $y=f(x)$, кроме

$$y'=f'(x) \quad \text{(Лагранж)}^{1)},$$

употребляются также символы:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x) \quad \text{(Лейбниц)}^{2)}$$

(смысл этого обозначения выяснится в гл. XII) и

$$\dot{y}=\dot{f}(x) \quad \text{(Ньютон)}^{3)}.$$

В тех случаях, когда неясно, по какому аргументу (x, t и т. п.) происходит дифференцирование функции y, для соответствующих производных употребляются обозначения

$$y'_x, \; y'_t \text{ и т. п.}$$

Замечание. Функция $f(x)$ считается дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема в любой его внутренней точке, т. е. $\forall x \in (a, b)$ существует предел

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

причем предполагается, что $x+\Delta x \in [a, b]$, а в граничных точках отрезка она имеет так называемые *односторонние* (*правая* и *левая*) *производные*, т. е. существуют соответствующие односторонние пределы

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad f'_-(b)=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}.$$

---

1) Читается: «игрек штрих равно эф штрих от икс».

2) $\frac{dy}{dx}$ читается: «дэ игрек по дэ икс».

3) $\dot{y}$ читается: «игрек с точкой».

Для значения производной $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ в фиксированной точке $x=x_1$ употребляются обозначения

$$(y')_{x=x_1}=[f'(x)]_{x=x_1}=f'(x_1).$$

Здесь $f'(x_1)$ — некоторое число.

Используя формулу (1), выражение для производной можно записать более подробно:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (5)$$

С помощью формулы (5), опираясь на теорию пределов, можно находить производные функций.

Пример 1. Найти производную функции $y=x^2$.

Пусть x — произвольное фиксированное значение аргумента. Давая x приращение $\Delta x\neq 0$, будем иметь $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$. Отсюда

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

и, следовательно,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Таким образом,

$$(x^2)'=2x. \qquad (6)$$

При решении задачи о касательной (§ 1) был выяснен геометрический смысл производной.

Геометрическое значение производной. *Для данной функции $y=f(x)$ ее производная $y'=f'(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке.*

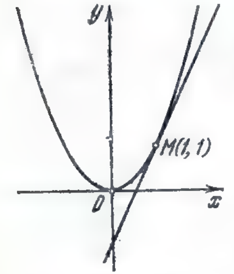


Рис. 102

Пример 2. Написать уравнение касательной к кривой $y=x^2$ в точке $M(1, 1)$ (рис. 102).

Ищем производную y' при $x=1$. Согласно формуле (6) имеем

$$y'=2x.$$

Отсюда

$$k=(y')_{x=1}=2.$$

Следовательно, уравнение касательной запишется так:

$$y-1=2(x-1), \quad \text{или} \quad y=2x-1.$$

Заметим, что касательная к графику функции $y=f(x)$ образует в данной точке с положительным направлением оси Ox острый или тупой угол, смотря по тому, будет ли

производная функции в этой точке положительна или отрицательна. Если же производная равна нулю, то касательная к графику функции в соответствующей точке, очевидно, параллельна оси Ox. Справедливы также и обратные утверждения.

Далее, из определения производной вытекает, что производная y' дает скорость изменения функции $y=f(x)$ относительно аргумента x. Например, если в некоторой точке x имеем $y'=2$, то это означает, что на малом промежутке $[x, x+\Delta x]$ прирост Δy функции y примерно в два раза больше, чем прирост аргумента x, причем это соотношение будет тем точнее, чем меньше $|\Delta x|$.

Особенно наглядный смысл получает производная функции $y=f(x)$, если под аргументом x понимать время. Тогда отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

представляет собой среднюю скорость изменения функции y за промежуток времени $[x, x+\Delta x]$, а предел этого отношения

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

есть скорость изменения функции y в момент времени x.

Таким образом, имеем:

Физическое значение производной. *Для функции $y=f(x)$, меняющейся со временем x, производная y'_x есть скорость изменения функции y в данный момент x.*

Производная дает возможность изучать характер изменения функции. Чем больше модуль производной, тем резче изменяется функция y при изменении аргумента x и, следовательно, тем круче подымается или опускается график этой функции. Если производная некоторой функции y положительна, то, очевидно, это означает, что с возрастанием аргумента x функция y также растет; если производная функции отрицательна, то это значит, что с возрастанием x функция y убывает. Об этом более подробно см. в гл. XI, § 2.

Понятие производной находит многочисленные применения в геометрии, физике, механике, химии, биологии и других науках.

§ 4. Другие применения производной

Быстрота протекания физических, химических, биологических и других процессов, например, скорость охлаждения тела, скорость химической реакции и т. п., также выражается при помощи производной. Поясним это на примерах.

Пример 1. Предположим, что температура тела U есть убывающая функция времени: $U = f(t)$.

Пусть t — фиксированный момент времени. Если t получает приращение Δt, температура U изменяется (уменьшается) на ΔU; тогда отношение

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}$$

представляет собой *среднюю скорость* охлаждения тела. А предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = f'(t),$$

выражает скорость охлаждения тела в данный момент t.

Таким образом, *скорость охлаждения тела равна производной температуры тела по времени.*

Пример 2. Обозначим через x количество вещества, образовавшегося при химической реакции за промежуток времени t. Очевидно, x есть функция времени: $x = f(t)$.

Если t получает приращение Δt, то x получает приращение Δx. Тогда отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

представляет собой *среднюю скорость* химической реакции, а предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)$$

выражает *скорость химической реакции в данный момент* t.

Таким образом, *скорость химической реакции равна производной реагирующей массы по времени.*

§ 5. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Мы видели (гл. VIII, § 1), что функция

$$y = f(x) \tag{1}$$

называется *непрерывной в точке x*, если в этой точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Функция (1) называется *дифференцируемой в точке x*, если в этой точке она имеет производную, т. е. если существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \qquad (2)$$

Между этими основными понятиями математического анализа имеется простая связь.

Теорема. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е. для этой функции выполнено равенство (2). Напишем тождество

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \qquad (\Delta x \neq 0).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Следствие. *Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.*

Пример непрерывной функции, не имеющей производной в одной точке, представляет функция

$$y = |x|$$

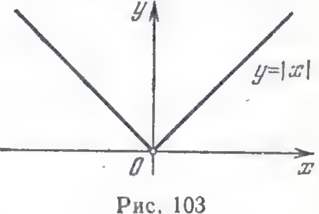


Рис. 103

(рис. 103). Эта функция непрерывна при $x = 0$, но не является дифференцируемой для этого значения, так как в точке $x = 0$ графика функции не существует касательной.

Математикам удалось построить примеры непрерывных функций, недифференцируемых ни в одной точке (Вейерштрасс и др.).

Впервые отчетливое различие между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции было дано гениальным русским математиком Н. И. Лобачевским.

Заметим, что производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама необязательно является непрерывной. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$, то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Функция $f(x)$, производная которой $f'(x)$ допускает лишь конечное число точек разрыва, и притом первого рода, на данном промежутке $\langle a; b \rangle$, называется *кусочно гладкой* на этом промежутке.

§ 6. Понятие о бесконечной производной

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \infty, \tag{1}$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную* в точке $x = x_0$. Согласно геометрическому смыслу производной (§ 1) производная $y'_0 = f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной $k = \operatorname{tg} \alpha$ в точке x_0. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ и, следовательно, $\alpha = \pi/2$. Таким образом, условие (1) геометрически означает, что в точке x_0 график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную касательную.

Упражнения

1. Что понимается: а) под средним подъемом пути; б) под подъемом пути в данной точке?

2. Что такое: а) средняя линейная плотность материального стержня; б) линейная плотность стержня в данной точке?

3. Что следует понимать: а) под средней скоростью изменения площади моря; б) под скоростью изменения площади моря в данный момент?

4. Дайте определение: а) средней теплоемкости тела; б) теплоемкости тела.

ГЛАВА X

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Вводные замечания

Как мы видели, решение многих задач сводится к вычислению производных известных функций. Поэтому важно уметь быстро находить производные более или менее сложных функций.

Операция нахождения производной не совсем точно называется *дифференцированием*, а функция, имеющая конечную производную на данном множестве, носит название *дифференцируемой* на этом множестве. Учение о производной и ее приложениях составляет предмет *дифференциального исчисления*.

В этой главе мы рассмотрим основные правила *дифференцирования функций*.

Здесь мы будем предполагать, если явно не оговорено противное, что рассматриваемые функции определены на некотором конечном или бесконечном интервале.

Прежде чем указать на основные правила для нахождения производных, вычислим производные некоторых простых функций.

§ 2. Производные от некоторых простейших функций

Производная функции $y=f(x)$ может быть найдена по следующей схеме:

1) аргументу x даем приращение $\Delta x \neq 0$ и находим для функции y соответствующее приращенное значение $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$;

2) вычитая из нового значения функции $y+\Delta y$ ее прежнее значение $y=f(x)$, получаем приращение Δy функции;

3) составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) находим предел этого отношения при условии, что $\Delta x \to 0$. Результат предельного перехода $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$

и является производной y' от функции y по аргументу x, если, конечно, он существует.

Пользуясь этой схемой, найдем производные некоторых простейших функций.

I. Производная от степени x^m, где m—целое положительное число. Пусть

$$y = x^m.$$

Имеем $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$, или согласно биному Ньютона

$$y + \Delta y = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m;$$

отсюда

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, находим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1}.$$

Следовательно,

$$(x^m)' = mx^{m-1}. \qquad (1)$$

Итак, имеем теорему: *производная от целой положительной степени независимой переменной равна показателю степени, умноженному на основание в степени на единицу меньше.*

В частности, при $m = 1$ получаем

$$(x)' = 1,$$

т. е. *производная независимой переменной равна единице.*

Имеем также

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

и т. д.

Замечание. Как будет показано дальше (§ 10), формула (1) справедлива для любого действительного постоянного показателя m (в частности, для дробного). Поэтому, например, имеем

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0);$$

т. е. *производная квадратного корня из независимой переменной равна обратной величине удвоенного корня.*

При $x=0$ функция $y=\sqrt{x}$ имеет производную $y'=\infty$. Здесь производная односторонняя, так как $\Delta x \to +0$. Геометрически это означает, что касательная к параболе $y=\sqrt{x}$ в точке $x=0$ перпендикулярна оси Ox.

II. Производная от $\sin x$. Пусть

$$y=\sin x,$$

где аргумент x выражен в радианной мере.

Имеем $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$. Отсюда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x,$$

или

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Разделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и пользуясь теоремой о пределе произведения, имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Из теоремы о пределе отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге (гл. VII, § 11) следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$$

Кроме того, в силу непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\cos x.$$

Следовательно,

$$y'=1\cdot\cos x=\cos x,$$

т. е.

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (2)$$

Итак, получаем теорему: *производная от* $\sin x$ *равна* $\cos x$.

III. Производная от $\cos x$. Пусть

$$y = \cos x.$$

Тогда $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$ и, следовательно,

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x,$$

или

$$\Delta y = -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \sin x,$$

то окончательно находим

$$y' = -\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (3)$$

Таким образом, имеем теорему: *производная от* $\cos x$ *равна* $\sin x$, *взятому с обратным знаком.*

§ 3. Основные правила дифференцирования функций

Переходим теперь к выводу основных правил дифференцирования функций.

Предположим, что все рассматриваемые функции определены и дифференцируемы на некотором общем интервале,

причем все используемые значения аргумента x и приращенные значения $x+\Delta x$ принадлежат этому интервалу.

I. Производная постоянной. *Производная постоянной величины равна нулю.*

Постоянную величину c можно рассматривать как функцию

$$f(x)=c,$$

принимающую одно и то же значение.

Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда, так как функция $f(x)$ не меняется при изменении аргумента, будем иметь

$$f(x+\Delta x)=c.$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, получим

$$f(x+\Delta x)-f(x)=0;$$

отсюда

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0.$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$, находим

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0,$$

т. е.

$$c'=0. \qquad (1)$$

Переводя этот результат на язык механики, получаем следующую наглядную иллюстрацию нашей теоремы: *скорость точки, находящейся в покое, равна нулю.*

II. Производная суммы. *Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций.*

Пусть, например,

$$y=u+v-w,$$

где u, v и w — некоторые дифференцируемые функции от x.

Дадим аргументу x приращение Δx; тогда каждая из функций u, v и w получит соответственно приращение Δu, Δv и Δw и вследствие этого функция y получит некоторое приращение Δy. Имеем

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w).$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, находим

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w.$$

Разделив обе части последнего равенства на Δx, будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что каждое слагаемое правой части имеет предел, находим

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

или, пользуясь определением производной, окончательно получим

$$y'=u'+v'-w'.$$

Таким образом, *если каждая из функций* u, v *и* w *дифференцируема, то алгебраическая сумма этих функций* (например, $u+v-w$) *также дифференцируема; при этом*

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти производную от функции $y=2-x+x^2$. Применяя формулу (1) из § 2, имеем $y'=(2)'-(x)'+(x^2)'=$ $=-1+2x$.

Следствие. *Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то производные их равны между собой.*

В самом деле, если $f(x)$ — дифференцируемая функция и c — постоянное слагаемое, то имеем

$$[f(x)+c]'=f'(x)+(c)'=f'(x)+0=f'(x).$$

III. Производная произведения. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на производную второго плюс произведение второго сомножителя на производную первого.*

Пусть

$$y=uv,$$

где u и v — некоторые дифференцируемые функции от x. Дадим x приращение Δx; тогда u получит приращение Δu, v получит приращение Δv и y получит приращение Δy. Имеем

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$

или

$$y+\Delta y=uv+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Следовательно,

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что u и v не зависят от Δx, будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x,$$

или

$$y' = uv' + vu'.$$

Таким образом, *если каждый из сомножителей u и v имеет производную, то произведение их uv также имеет производную; при этом*

$$(uv') = uv' + vu'. \qquad (3)$$

Пример 2. Пусть $y = x^3 \sin x$.

Применяя формулу (3) и пользуясь формулами (1) и (2) из § 2, будем иметь

$$y' = x^3 (\sin x)' + (x^3)' \sin x = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x.$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

В самом деле, если c — постоянный множитель, то имеем

$$(cu)' = cu' + c'u,$$

отсюда, так как $c' = 0$, получаем

$$(cu)' = cu'.$$

Следствие 2. *Если*

$$y = uvw,$$

где u, v и w — дифференцируемые функции от x, то

$$y' = (uvw)' = [(uv)w]' = (uv)w' + (uv)'w =$$
$$= (uv)w' + (uv' + u'v)w = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Вообще, *производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из этих сомножителей на все остальные.*

IV. Производная частного. *Если числитель и знаменатель дроби — дифференцируемые функции и знаменатель не обращается в нуль, то производная дроби равна также дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя.*

Пусть

$$y = \frac{u}{v},$$

где u и v — дифференцируемые функции от x, и $v \neq 0$. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда u, v, y получат соответственно приращения Δu, Δv, Δy, и мы будем иметь

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Вычитая почленно первое равенство из второго, получим

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}, \quad \text{или} \quad \Delta y = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{(v + \Delta v)\,v}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)\,v}. \tag{4}$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Так как функция v дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке (гл. IX, § 5), и следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (4) и учитывая, что функции u и v имеют производные, получаем

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

или окончательно

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{5}$$

Пример 3. Пусть $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Применяя формулу (5), будем иметь

$$y' = \frac{(x^2+1)(x^2-1)' - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)\,2x - (x^2-1)\,2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Следствие 1. *Если знаменатель дроби — постоянная величина, то*

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{cu' - uc'}{c^2} = \frac{u'}{c},$$

т. е.

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}.$$

Замечание. Последний результат является очевидным, так как

$$\frac{u}{c} = \frac{1}{c} \cdot u$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} u' = \frac{u'}{c}.$$

Следствие 2. *Если числитель дроби — постоянная величина, то*

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{vc' - cv'}{v^2} = -\frac{cv'}{v^2}. \quad (6)$$

В частности, при $c = 1$ находим

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}. \quad (7)$$

Пример 4. Если $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, то в силу формулы (7) имеем

$$y' = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

V. Производная степени с целым отрицательным показателем. Пусть m — целое положительное число и

$$y = x^{-m},$$

или

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

Применяя формулу (7), получим:

$$y' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

Следовательно,

$$(x^{-m})' = -mx^{-m-1}. \quad (8)$$

Мы получили то же правило, что и при дифференцировании целой положительной степени.

VI. Производная от $\operatorname{tg} x$. Пусть

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Применяя формулу (5), находим

$$y' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x. \qquad (9)$$

VII. Производная от $\operatorname{ctg} x$. Пусть

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Тогда имеем

$$y' = \frac{\sin x \cdot (\cos x)' - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Итак,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x. \qquad (10)$$

§ 4. Производная сложной функции

Рассмотрим некоторую сложную функцию

$$y = f[\varphi(x)].$$

Если в цепи функциональных зависимостей $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ аргумент x является последним, то мы будем называть его *независимой переменной* (чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что изменение этого аргумента не зависит от поведения других переменных величин).

Таким образом, понятие аргумента и независимой переменной следует различать. Например, пусть

$$y = \sin z \quad \text{и} \quad z = x^2.$$

Здесь z есть аргумент функции y, но z, очевидно, не будет независимой переменной.

Для простоты будем предполагать, что функция $y = f(z)$ определена и дифференцируема в интервале (A, B), функция $z = \varphi(x)$ определена и дифференцируема в интервале (a, b) и принимает значения из интервала (A, B). Тогда

функция (1) заведомо будет определена и непрерывна в интервале (a, b). Возникает вопрос о дифференцируемости этой функции.

Теорема. *Если $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции*

$$y = f[\varphi(x)]$$

существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x, т. е.

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

Доказательство. Пусть x — допустимое значение независимой переменной. Дадим x отличное от нуля достаточно малое приращение Δx; тогда $z = \varphi(x)$ и $y = f(z)$ получат соответствующие приращения Δz и Δy. Так как производная $y'_z = f'(z)$ по условию теоремы существует, то, предполагая, что $\Delta z \neq 0$, можно написать

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z + \alpha$$

(см. гл. VII, § 6), где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$ и, следовательно,

$$\Delta y = (y'_z + \alpha)\,\Delta z.$$

Доопределим бесконечно малую α при $\Delta z = 0$, полагая: $\alpha = 0$ при $\Delta z = 0$. Тогда последнее равенство будет справедливо также и при $\Delta z = 0$, так как в этом случае, очевидно, обе части его равны нулю. Разделив обе части этого равенства на Δx, будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_z + \alpha) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что при этом $\Delta z \to 0$ и, следовательно, $\alpha \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (y'_z + \alpha) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

или

$$y'_x = y'_z \cdot y'_z, \qquad (2)$$

что и доказывает теорему.

Доказанную теорему коротко формулируют так:

Дифференцируемая функция от дифференцируемой функции есть функция, также дифференцируемая.

Замечание. В обозначениях Лейбница формула (2) принимает вид тождества

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Пример 1. Найти производную от функции $y=\sin(x^2)$.

Полагаем $z=x^2$, тогда $y=\sin z$. Отсюда

$$z'_x=2x \quad \text{и} \quad y'_z=\cos z=\cos(x^2).$$

Следовательно, согласно формуле (1) имеем

$$y'_x=\cos(x^2)\cdot 2x=2x\cos(x^2).$$

Пример 2. Найти производную от функции $y=\sin^3 x=(\sin x)^3$.

Полагаем $z=\sin x$; тогда $y=z^3$. Отсюда

$$z'_x=\cos x \quad \text{и} \quad y'_z=3z^2=3\sin^2 x.$$

Следовательно,

$$y'_x=3\sin^2 x\cos x.$$

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 3. Найти производную от функции $y=\sqrt{x^2+4x+3}$.

Используя формулу для производной квадратного корня (§ 2) и применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot(x^2+4x+3)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot(2x+4)=$$
$$=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Пример 4. Найти производную от функции $y=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$.

Имеем

$$y'=3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}.$$

§ 5. Производная обратной функции

Пусть

$$y=f(x) \tag{1}$$

есть дифференцируемая функция от аргумента x в некотором интервале (a, b). Если в уравнении (1) y рассматривать как аргумент, а x как функцию, то эта новая функция

$$x=\varphi(y),$$

где $f[\varphi(y)]\equiv y$, называется, как мы знаем, обратной по отношению к данной. Нашей задачей является: зная

производную $y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ функции $y = f(x)$, найти производную $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ обратной ей функции $x = \varphi(y)$, предполагая, что обратная функция существует и непрерывна в соответствующем промежутке (не разрешая уравнения (1)).

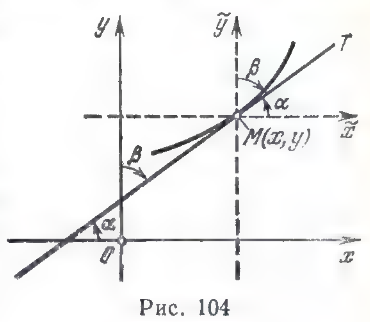


Рис. 104

Теорема. *Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема и $y'_x = f'(x) \neq 0$.

Пусть $\Delta y \neq 0$ — приращение независимой переменной y и Δx — соответствующее приращение обратной функции $x = \varphi(y)$. Напишем тождество

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}\ [1]. \tag{2}$$

Переходя к пределу в равенстве (2) при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что при этом также $\Delta x \to 0$ (в силу непрерывности обратной функции), получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \tag{3}$$

где x'_y — производная обратной функции.

Замечание. Если пользоваться обозначениями Лейбница, то формула (3) примет вид

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Вспоминая геометрический смысл производной, можно дать простую иллюстрацию формулы (3). В точке $M(x, y)$ графика функции $y = f(x)$ проведем касательную MT к этому графику и прямые $M\tilde{x}$ и $M\tilde{y}$, параллельные соответственно координатным осям Ox и Oy (рис. 104). Обозначая через α и β углы, образован-

[1]) Можно доказать, что если при наших условиях $\Delta y \neq 0$, то $\Delta x \neq 0$. Поэтому равенство (2) не может потерять смысл.

ные касательной MT с положительными направлениями осей Ox и Oy соответственно, будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\angle TM\tilde{x})=y'_x$$

и

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\angle TM\tilde{y})=x'_y.$$

Так как $\alpha+\beta=\pi/2$, то отсюда следует

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=y'_x\cdot x'_y=1,$$

что эквивалентно формуле (2).

Пример. Пусть $y=x+x^3$. Имеем $y'_x=1+3x^2$, и следовательно,

$$x'_y=\frac{1}{1+3x^2}.$$

§ 6. Производная неявной функции

Рассмотрим несколько примеров дифференцирования неявных функций.

Пример 1. Найти производную функции y ($y>0$), определяемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Разрешая это уравнение относительно y и беря знак плюс, в силу условия будем иметь нашу функцию в явном виде:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Дифференцирование ее теперь не представляет никаких затруднений.

Однако в некоторых случаях данное нам уравнение элементарными средствами нельзя разрешить относительно y, и приходится рассматривать y как неявную функцию от x. Поэтому укажем другой способ нахождения производной неявной функции y. А именно, предполагая, что в данное уравнение вместо y подставлено его явное выражение, получим тождество

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\equiv 1,$$

причем здесь y есть функция от x. Очевидно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому взяв производные от левой и правой частей предыдущего тождества и применяя правило

дифференцирования сложной функции (§ 4), будем иметь

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0;$$

отсюда

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Пример 2. Пусть y есть положительная или отрицательная неявная функция от x, определяемая уравнением

$$y^2=2px.$$

Предполагая, что вместо y подставлено соответствующее явное выражение, и дифференцируя по x левую и правую части полученного тождества, будем иметь $2yy'=2p$.

Отсюда

$$y'=\frac{p}{y}.$$

Замечание. Если две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны друг другу не тождественно, а лишь для некоторого значения x_0 аргумента

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),$$

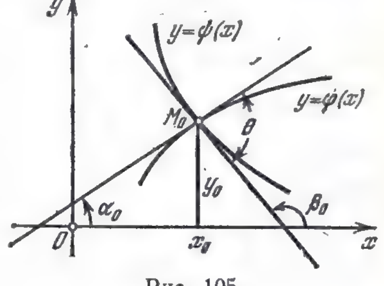


Рис. 105

то отсюда, вообще говоря, не следует, что $\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)$. Это ясно видно из рис. 105, где

$$\varphi'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_0 \quad \text{и} \quad \psi'(x_0)=\operatorname{tg}\beta_0.$$

Таким образом, *равенство в общем случае нельзя дифференцировать почленно.*

§ 7. Производная логарифмической функции

Пусть

$$y=\log_a x,$$

где $x>0$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Найдем производную этой функции, пользуясь схемой, изложенной в начале § 2.

Дадим аргументу x (x фиксировано) приращение $\Delta x\neq 0$ такое, что $x+\Delta x>0$. Тогда функция y получит приращение Δy, и мы будем иметь $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$; следовательно,

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x$$

или, так как разность логарифмов равна логарифму частного, то

$$\Delta y = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Разделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Полагая здесь $\frac{\Delta x}{x} = \alpha\ (\alpha > -1)$, находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha}\log_a(1+\alpha),$$

или на основании известного свойства логарифма:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда, очевидно, и $\alpha \to 0$ (как произведение бесконечно малой Δx на постоянную величину $\frac{1}{x}$). Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{\alpha \to 0}\left[\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Функция $F(\alpha) = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, очевидно, непрерывна при $\alpha \neq 0$. Так как логарифмическая функция также непрерывна и

$$\lim_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

(гл. VII, § 12), то знаки $\lim\limits_{\alpha \to 0}$ и $\log_a$ можно переставить местами (гл. VIII, § 2)[1]:

$$\lim_{\alpha \to 0}\left[\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \log_a\left[\lim_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \log_a e.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

---

[1]) Здесь мы по непрерывности доопределяем при $\alpha = 0$ функцию $F(\alpha) = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, полагая $F(0) = e$.

Таким образом, имеем формулу

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e. \qquad (1)$$

Пользуясь известным соотношением (гл. VII, § 13) $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, формулу (1) можно переписать в виде

$$(\log_a x') = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (1')$$

Полагая здесь, в частности, $a = e$ и помня, что $\ln e = 1$, получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (2)$$

т. е. *производная натурального логарифма от независимой переменной равна обратной величине этой независимой переменной.*

Другой важный частный случай получаем при $a = 10$:

$$(\lg x)' = \frac{M}{x},$$

где $M = \lg e \approx 0{,}43429$ — модуль перехода.

Рис. 106

Логарифмическая функция $y = \ln x$ определена лишь при $x > 0$. Для приложений удобно рассматривать функцию

$$y = \ln|x|,$$

которая имеет смысл как при x положительном, так и при x отрицательном, т. е. определена при $x \neq 0$ (рис. 106). Для нахождения производной этой функции запишем ее с помощью двух равенств:

$$y = \ln x \text{ при } x > 0 \text{ и } y = \ln(-x) \text{ при } x < 0.$$

Отсюда получаем

$$y' = \frac{1}{x} \text{ при } x > 0$$

и

$$y' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \text{ при } x < 0.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \text{ т. е. } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

§ 8. Понятие о логарифмической производной

Пусть

$$y=\ln z, \text{ где } z=\varphi(x).$$

Тогда, применяя формулу дифференцирования сложной функции, получим

$$y'_x=(\ln z)'_x=(\ln z)'_z z'_x, \text{ или } y'_x=\frac{1}{z}z'_x.$$

Таким образом, имеем

$$(\ln z)'_x=\frac{z'}{z}.$$

Производная от логарифма функции называется *логарифмической производной* функции.

Пример. Найти производную функции $y=\ln(x^2+4x+5)$.
Применяя последнюю формулу, имеем

$$y'=\frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}=\frac{2x+4}{x^2+4x+5}.$$

§ 9. Производная показательной функции

Пусть

$$y=a^x, \text{ где } a>0.$$

Тогда

$$\ln y=x\ln a.$$

Взяв производную от левой и правой части по x, будем иметь [1])

$$\frac{1}{y}y'=\ln a;$$

отсюда

$$y'=y\ln a,$$

или окончательно

$$(a^x)'=a^x\ln a. \qquad (1)$$

Таким образом, *производная показательной функции равна самой функции, умноженной на натуральный логарифм основания.*

---

[1]) Существование y' вытекает из дифференцируемости логарифмической функции (см. §§ 7 и 5).

Пример. Найти производную функции $y=2^x$.

По формуле (1) имеем

$$(2^x)'=2^x \ln 2.$$

Полагая в формуле (1), в частности, $a=e$, получим

$$(e^x)'=e^x,$$

т. е. *производная экспоненциальной функции e^x равна самой функции.* В этом смысле функция e^x является простейшей функцией математического анализа.

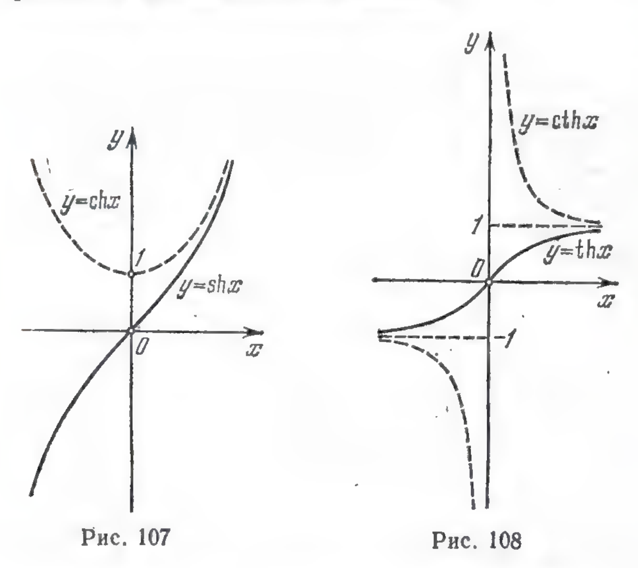


Рис. 107 Рис. 108

В приложениях часто встречаются *гиперболические функции*, которые формально определяются равенствами

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

(рис. 107) и

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \qquad (3)$$

(рис. 108). Из формул (2) получаем основное соотношение

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

На основании формул (2) и (3) непосредственно находим производные гиперболических функций

$$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x, \ (\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x, \ (\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \ (\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

§ 10. Производная степенной функции

Рассмотрим степенную функцию

$$y = x^{\alpha} \quad (x > 0), \qquad (1)$$

где α — любое действительное число.

Логарифмируя равенство (1), получим

$$\ln y = \alpha \ln x. \qquad (2)$$

Отсюда

$$y = e^{\alpha \ln x}.$$

Поэтому в силу теоремы о производной сложной функции (§ 4) степенная функция y дифференцируема.

Дифференцируя по переменной x равенство (2), будем иметь

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким образом, мы получаем общее правило дифференцирования степенной функции:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}, \qquad (2)$$

т. е. *производная степени независимой переменной равна показателю степени, умноженному на основание в степени на единицу меньше.*

Если степенная функция (1) имеет смысл при $x \leqslant 0$, то формула (2) будет справедлива также и при $x \leqslant 0$.

§ 11. Производные обратных тригонометрических функций

Функции, обратные тригонометрическим функциям, носят название *обратных тригонометрических* или *обратных круговых* функций ($\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$, $\mathrm{Arctg}\, x$, $\mathrm{Arcctg}\, x$ и т. д.).

Главные значения обратных тригонометрических функций получаются в результате обращения дифференцируемых (с отличной от нуля производной в соответствующей области) тригонометрических функций и, следовательно, в силу теоремы о производной обратной функции (§ 5)

являются также **дифференцируемыми**. Найдем их производные.

I. **Производная** от $\arcsin x$. Пусть

$$y = \arcsin x, \tag{1}$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ (см. гл. VI, § 9). Обратная функция имеет вид

$$x = \sin y, \tag{2}$$

причем $x'_y = \cos y \neq 0$, если $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Используя правило дифференцирования обратной функции (§ 5), получим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}. \tag{3}$$

Так как $\cos y > 0$ при $-\pi/2 < y < \pi/2$, то, учитывая (2), получаем

$$\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} > 0, \quad -1 < x < 1.$$

Следовательно, на основании (3) имеем

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

т. е.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что кривая (1) при $x = \pm 1$ имеет вертикальные касательные.

II. **Производная** от $\arccos x$. Пусть

$$y = \arccos x,$$

тогда

$$x = \cos y,$$

причем $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

На основании правила дифференцирования обратной функции (§ 5) имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Так как $\sin y > 0$ при $0 < y < \pi$, то

$$\sin y = +\sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1).$$

Поэтому

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким образом,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (5)$$

Замечание. Формулу (5) мы могли бы также получить из соотношения

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

III. Производная от $\operatorname{arctg} x$. Пусть

$$y = \operatorname{arctg} x \qquad (-\infty < x < +\infty, \ -\pi/2 < y < \pi/2)$$

и, следовательно, $x = \operatorname{tg} y$.

Имеем (см. VI, § 3)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

IV. Производная от $\operatorname{arcctg} x$. Пусть

$$y = \operatorname{arcctg} x \ (-\infty < x < +\infty, \ 0 < y < \pi),$$

тогда $x = \operatorname{ctg} y$.

Имеем (см. VII, § 3)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример. $\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} \ (x \neq 0).$

§ 12. Производная функции, заданной параметрически

Зависимость между переменными x и y иногда удобно задавать двумя уравнениями

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \qquad (1)$$

где t — вспомогательная переменная (параметр). Особенно часто этим пользуются в механике, где параметр t обычно обозначает время, а уравнения (1) представляют собой *параметрические уравнения траектории* движущейся точки $M(x, y)$.

Уравнения (1), вообще говоря, определяют y как сложную функцию от x. В самом деле, разрешив первое уравнение системы (1) относительно параметра t (если это возможно), будем иметь

$$t = \theta(x),$$

где θ — функция, обратная к функции φ. Отсюда, исключая из уравнений (1) параметр t, получим

$$y = \psi(\theta(x)). \tag{2}$$

Пользуясь формулой (2), легко найти производную y'_x как производную сложной функции.

Однако на практике исключение параметра t часто бывает затруднительным, а иногда даже невозможным. Поэтому мы дадим правило для нахождения производной y'_x, не требующее исключения параметра.

Теорема. *Если функция y от аргумента x задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная этой функции есть*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3}$$

Доказательство. В цепи равенств

$$y = \psi(t), \quad t = \theta(x),$$

где $t = \theta(x)$ есть обратная функция по отношению к функции $x = \varphi(t)$, будем рассматривать параметр t как промежуточный аргумент. В таком случае, согласно правилу дифференцирования сложной функции (§ 4), имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x. \tag{4}$$

Применяя теперь правило дифференцирования обратной функции (§ 5), получим

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{5}$$

Следовательно, из формул (4) и (5) находим $y'_x = y'_t : x'_t$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пользуясь обозначениями Лейбница, формуле (3) можно придать вид очевидного равенства

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}.$$

Этим еще раз подчеркивается удобство обозначений Лейбница.

Пример. Пусть

$$x=t^2,\ y=t^3. \tag{6}$$

Имеем $x'_t=2t$, $y'_t=3t^2$. Следовательно,

$$y'_x=y'_t:x'_t=3t^2:2t=\frac{3}{2}t.$$

Справедливость последней формулы можно непосредственно проверить, исключая из равенств (6) параметр t.

§ 13. Сводка формул дифференцирования

Выведенные нами правила и формулы дифференцирования для функций одного и того же независимого переменного x объединим в таблицу:

I. $c'=0$.

II. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$.

III. $(cu)'=cu'$.

IV. $(uv)'=uv'+vu'$.

V. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$.

VI. $y'_x=y'_z\cdot z'_x$.

VII. $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

VIII. $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$.

IX. $(\sin x)'=\cos x$.

X. $(\cos x)'=-\sin x$.

XI. $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$.

XII. $(\operatorname{ctg} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$.

XIII. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

XIV. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$.

XV. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XVI. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XVII. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

XVIII. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

§ 14. Понятие о производных высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется *производной первого порядка* и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама

имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* или *второй производной* и обозначается так: $f''(x)$. Итак,

$$f''(x)=[f'(x)]'.$$

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается так: $f'''(x)$, т. е.

$$f'''(x)=[f''(x)]',$$

и т. д.

Для обозначения дальнейших производных употребляются римские цифры.

Пример. Пусть $y=\sin x$. Тогда имеем последовательно

$$y'=\cos x, \quad y''=-\sin x, \quad y'''=-\cos x, \quad y^{\mathrm{IV}}=\sin x, \ \ldots$$

§ 15. Физическое значение производной второго порядка

Мы видели, что с помощью производной первого порядка можно найти скорость движения. Покажем, что для того, чтобы вычислить ускорение движения, надо воспользоваться производной второго порядка.

Пусть закон движения точки M по оси Ox выражается уравнением $x=f(t)$. Пусть в момент времени t точка M имеет скорость v, а в момент $t+\Delta t$ — скорость $v+\Delta v$.

Таким образом, за промежуток времени Δt скорость точки изменилась на величину Δv. Отношение

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

называется *средним ускорением* прямолинейного движения за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t),$$

называется *ускорением точки* M в данный момент t. Обозначая ускорение буквой j, можем написать $j=v'(t)$. Но $v=f'(t)$. Поэтому

$$v'(t)=[f'(t)]'=f''(t).$$

Итак, имеем

$$j = f''(t),$$

т. е. *величина ускорения прямолинейного движения точки равна второй производной от пути*[1]) *по времени.*

Упражнения

Найти производные от следующих функций:

1. а) $y = 3x^2 - x + 5$; б) $f(x) = 1/x^2$. Чему равны $f'(1)$, $f'(-10)$?

2. $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **3.** $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x^2}$. **4.** $y = \dfrac{ax+b}{a+b}$.

5. $y = x^2(2x - 1)$. **6.** $y = (x+1)\sqrt{x}$. **7.** $y = x^2 \sin x$.

8. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$. **9.** $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$. **10.** $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

11. $y = \sin^2 x$. **12.** $y = \sin x^2$. **13.** $y = \cos^3 \dfrac{x}{2}$. **14.** $y = \cos \dfrac{x^3}{2}$.

15. $y = \sqrt{1 + x^2}$. **16.** $y = \ln \ln x$. **17.** $y = \ln^2 x$. **18.** $y = \ln x^2$.

19. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. **20.** $y = x^n + n^x$. **21.** $y = e^{-x^2}$.

22. $y = e^{x/2}(x^2 - 4x + 8)$. **23.** $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$. **24.** $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

25. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$. **26.** $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$. **27.** $f(x) = x + \operatorname{arcctg} x$.

28. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. **29.** $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2} \arcsin x$.

30. $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

Найти производные от дифференцируемых неявных функций $y = y(x)$, определяемых уравнениями:

31. $x^2 + y^2 - xy = 1$. 32. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

33. а) $y = x + \ln y$; б) найти y' в точке $M(1, 1)$, если $\dfrac{x}{y} + 2xy = 3$.

34. Найти производные y'_x от функций, заданных параметрически:

а) $x = a\cos t$, $y = b \sin t$; б) $x = \omega t$, $y = te^{\alpha t}$;

в) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$ при $t = 0$.

Найти вторые производные от функций.

35. а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = x + \sin 2x$. 36. $y = \ln x$. 37. $y = x^2 e^{-x}$.

38. Найти $f(0)$, $f'(0)$ и $f''(0)$, если $f(x) = \cos 3x$.

39. а) Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке ее $M(2, 8)$; б) написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке $x = \pi$; в) написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 2x$ в точке $(8, 4)$.

---

[1]) Точнее: *от абсциссы движущейся точки.*

40. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке его $M(x_1, y_1)$.

41. Написать уравнение касательной к эллипсу $x=10\cos t$, $y=6\sin t$ в точке, соответствующей $t=\pi/3$.

42. Нормалью к кривой в данной ее точке $M(x_1, y_1)$ называется перпендикуляр к касательной к этой линии в точке касания M.

Написать уравнения нормалей к следующим кривым в заданных точках:

а) $y=\operatorname{tg} x$ в точке $O(0, 0)$; б) $y^2=2x$ в точке $M(8, 4)$;
в) $x^2+y^2=25$ в точке $(3, -4)$.

43. С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус его $R=10$ м, если радиус круга растет со скоростью 2 м/с?

44. Человек ростом $h=175$ см отходит со скоростью $v=1,5$ м/с от фонаря, висящего на высоте $H=5$ м. С какой скоростью растет длина его тени?

45. Закон движения точки $x=x_0+\alpha t+\frac{\beta}{2}t^2$. Найти скорость и ускорение движения.

46. Зная уравнение движения точки $x=t-\sin t$, определить скорость и ускорение этой точки.

ГЛАВА XI

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Теорема о конечном приращении функции и ее следствия

Теорема Лагранжа о конечном приращении функции. *Конечное приращение дифференцируемой функции равно соответствующему приращению аргумента, умноженному на значение ее производной в некоторой промежуточной точке, т. е. если $f(x)$ есть дифференцируемая функция на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ и x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ — любые значения из этого промежутка, то*

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi), \qquad (1)$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

Доказательство. На графике функции $y=f(x)$ проведем секущую AB через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$

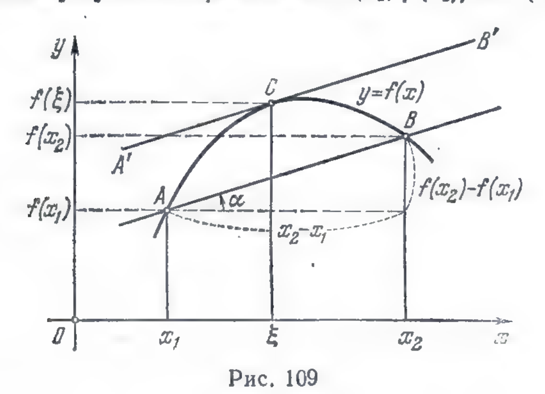


Рис. 109

(рис. 109). Будем перемещать эту секущую параллельно начальному положению до тех пор, пока она не превратится в касательную $A'CB'$ к графику нашей функции в

некоторой точке его $C(\xi, f(\xi))$ [1]), где $x_1 < \xi < x_2$. Согласно нашему построению угловой коэффициент секущей AB равен угловому коэффициенту касательной $A'CB'$, поэтому

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi).$$

Отсюда

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1) f'(\xi),$$

что и требовалось доказать [2]).

Следствие 1. *Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция есть тождественная постоянная на этом промежутке.*

В самом деле, если, например,

$$f'(x) = 0 \quad \text{при} \quad a < x < b,$$

то, полагая в формуле (1) $x_1 = x_0$, где x_0 есть некоторое фиксированное значение из промежутка (a, b), и $x_2 = x$, где x — любое значение из этого промежутка, будем иметь

$$f(x)-f(x_0) = (x-x_0) f'(\xi) = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = f(x_0) = \text{const}, \quad \text{если} \quad a < x < b.$$

Следствие 2. *Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то эти функции на рассматриваемом промежутке отличаются друг от друга самое большее на постоянное слагаемое.*

В самом деле, если

$$f_1'(x) = f_2'(x)$$

при $x \in \langle a, b \rangle$, то на этом промежутке имеем

$$[f_1(x) - f_2(x)]' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0.$$

Следовательно, в силу следствия 1 функция $f_1(x) - f_2(x)$ есть постоянная при $a < x < b$, т. е.

$$f_1(x) - f_2(x) = C$$

для всех значений x, принадлежащих промежутку $\langle a, b \rangle$.

---

[1]) Мы опускаем здесь доказательство того факта, что такое предельное положение существует.

[2]) Можно доказать, что теорема Лагранжа остается верной, если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри его (см. Сахарников Н. А. Высшая математика, гл. II, § 5).

Пример. Как известно, для любого значения $-\infty < x < +\infty$ имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{и} \quad (-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arcctg} x) = C,$$

где C — некоторая постоянная. Положив в последнем тождестве $x = 1$, получим $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = C$, т. е. $C = \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема о корнях производной (теорема Ролля). *Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по меньшей мере один корень ее производной.*

Доказательство. В самом деле, если $f(x)$ — дифференцируемая функция и

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad (x_1 < x_2),$$

то из формулы (1) имеем

$$(x_2 - x_1) f'(\xi) = 0,$$

или, так как $x_2 \neq x_1$,

$$f'(\xi) = 0, \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2.$$

§ 2. Возрастание и убывание функции одной переменной

Определение. *Говорят, что функция $f(x)$ возрастает в промежутке $\langle a, b \rangle$, если любому большему значению аргумента x в этом промежутке соответствует большее значение функции*; иными словами, $f(x)$ есть возрастающая функция в промежутке $\langle a, b \rangle$, если, каковы бы ни были значения x_1 и x_2 из этого промежутка (рис. 110, *а*), из неравенства

$$x_2 > x_1$$

вытекает равенство

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Аналогично, говорят, что *$f(x)$ убывает в промежутке $\langle a, b \rangle$, если любому большему значению аргумента x в этом промежутке соответствует меньшее значение функции*; иными словами, $f(x)$ есть убывающая функция

(рис. 110, *б*), если из неравенства

$$x_2 > x_1$$

вытекает неравенство

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Теорема 1. Необходимый признак возрастания (убывания) функции.

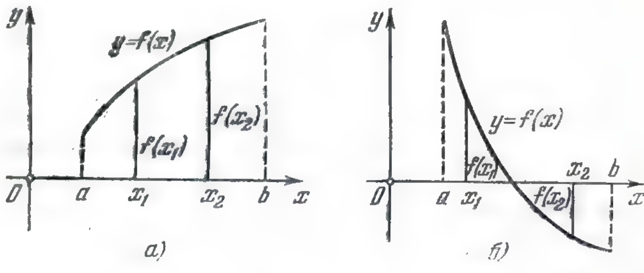


Рис. 110

1) *Если дифференцируемая функция возрастает в некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна в этом промежутке.*

2) *Если дифференцируемая функция убывает в некотором промежутке, то ее производная неположительна в этом промежутке.*

Доказательство. 1) Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает в промежутке $\langle a, b\rangle$. Согласно определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если значения x и $x+\Delta x$ принадлежат промежутку $\langle a, b\rangle$, то в силу возрастания функции $f(x)$ знак ее приращения $f(x+\Delta x) - f(x)$, где $\Delta x \neq 0$, одинаков со знаком приращения Δx аргумента x. Следовательно, при достаточно малом по абсолютной величине Δx имеем

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что предел положительной функции, очевидно, не может быть отрицательным, получим (гл. VII, § 3)

$$f'(x) \geqslant 0.$$

2) Доказательство второй части теоремы вполне аналогично доказательству первой части ее.

Замечание. Геометрически утверждение теоремы сводится к тому, что для графика возрастающей дифференцируемой функции касательные образуют с положительным направлением оси Ox острые углы α ($\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$) или в некоторых точках A параллельны оси Ox (рис. 111).

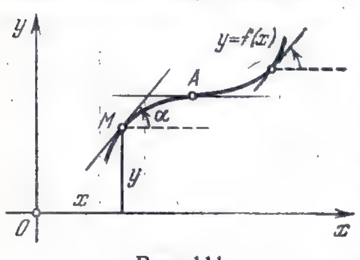


Рис. 111

Для графика убывающей дифференцируемой функции все касательные образуют тупые углы с положительным направлением оси Ox или параллельны ей.

Теорема 2. Достаточный признак возрастания (убывания) функции.

1) *Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.*

2) *Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка, то функция убывает на этом промежутке.*

Доказательство. 1) Пусть, например, дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

Для любых двух значений $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, принадлежащих промежутку $\langle a, b \rangle$, в силу теоремы о конечном приращении функции имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

где ξ — промежуточное значение между x_1 и x_2 и, следовательно, лежащее внутри промежутка $\langle a, b \rangle$. Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(\xi) > 0$, то отсюда получим

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \quad \text{или} \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\langle a, b \rangle$.

2) Доказательство второй части этой теоремы совершенно аналогично доказательству первой части ее.

Функция, возрастающая (или убывающая), называется *монотонной*. Промежутки, в которых данная функция

возрастает или убывает, называются *промежутками монотонности* этой функции.

Пример. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$f(x)=x^3-3x+2.$$

Находим производную

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1).$$

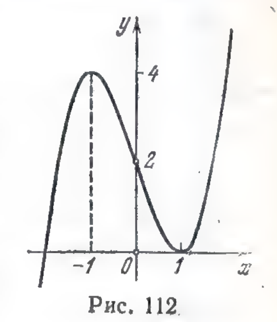


Рис. 112

Производная обращается в нуль при значениях $x_1=-1$ и $x_2=1$. Эти значения разбивают всю бесконечную ось Ox на три промежутка:

$$(-\infty, -1], [-1, 1], [1, +\infty),$$

внутри каждого из которых производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Очевидно, внутри первого и третьего промежутков производная $f'(x)$ положительна, а внутри второго отрицательна. В этом проще всего можно убедиться, взяв точки, принадлежащие соответствующим интервалам. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает в первом промежутке, убывает во втором и снова возрастает в третьем (рис. 112).

§ 3. Понятие о правиле Лопиталя

Рассмотрим отношение

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности U_a точки a, исключая, быть может, саму точку a. Может случиться, что при $x\to a$ обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стремятся к 0 или к ∞, т. е. эти функции одновременно являются или бесконечно малыми или бесконечно большими при $x\to a$. Тогда говорят, что в точке a функция $f(x)$ имеет неопределенность, соответственно, вида

$$\frac{0}{0} \quad \text{или} \quad \frac{\infty}{\infty}. \tag{1}$$

В этом случае, используя производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, можно сформулировать простое правило для нахождения предела функции $f(x)$ при $x\to a$, т. е. дать рецепт для раскрытия неопределенностей вида (1). Это правило обычно связывают с именем французского математика Лопиталя, впервые опубликовавшего его.

Теорема. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отноше-*

ния их производных (конечному или бесконечному), если последний существует (в указанном смысле).

Доказательство. Доказательство мы проведем только для неопределенности вида $\frac{0}{0}$, причем для простоты будем предполагать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, вместе с их производными $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, непрерывны в точке a и $\psi'(a) \neq 0$. Доказательство для случая $\frac{\infty}{\infty}$ значительно сложнее (см., например Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I).

Итак, пусть

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \qquad (2)$$

и

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \psi(a) = 0. \qquad (2')$$

Разность $\varphi(x) - \varphi(a)$ можно рассматривать как приращение функции $\varphi(x)$ в точке a, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - a$. Поэтому

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a); \qquad (3)$$

аналогично,

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} = \psi'(a) \neq 0. \qquad (3')$$

Учитывая формулы (2) и (2′) при $x \neq a$, получим

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a}}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to a$ и используя формулы (3) и (3′), будем иметь

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (4)$$

Но мы предположили, что производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ непрерывны при $x \to a$, причем $\psi'(a) \neq 0$, поэтому

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi'(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (5)$$

Сопоставляя формулы (4) и (5), получим *правило Лопиталя*

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \qquad (6)$$

Замечание. Обращаем внимание, что в правой части формулы (6) берется отношение производных, а не производная отношения.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{\sin x}$.

Здесь при $x = 0$ числитель и знаменатель дроби равны нулю, т. е. при $x \to 0$ мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя (6), получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

При $x \to +\infty$ имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Применяя правило Лопиталя два раза, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Таким образом, при $x \to +\infty$ показательная функция e^x растет быстрее степенной функции x^2.

Указанные выше типы неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ не являются единственными. Например, если

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

причем $\varphi(x) \to 0$ и $\psi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Другой пример представляет функция

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где $\varphi(x) \to +\infty$ и $\psi(x) \to +\infty$ при $x \to a$. Здесь при $x \to a$ получаем неопределенность вида $\infty - \infty$. Возможны и другие виды неопределенностей. Для раскрытия этих неопределенностей их стараются с помощью тождественных преобразований свести к основным типам неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Последние обычно находятся на основании правила Лопиталя.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

Здесь мы имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Переписывая данное выражение в виде

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Отсюда, применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x - \frac{1}{x}\right)$.

Данное выражение представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty$. Используя формулу $\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, будем иметь

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

Так как получилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0.$$

Последний результат был получен на основании известного предела: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (гл. VII, § 11). Здесь при нахождении предела оказалось целесообразным, как и во многих других случаях, комбинировать правило Лопиталя с элементарными приемами.

Для функции

$$f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

в случаях:

$$\varphi(x)\to0 \quad\text{и}\quad \psi(x)\to0 \quad\text{при}\quad x\to a,$$
$$\varphi(x)\to\infty \quad\text{и}\quad \psi(x)\to0 \quad\text{при}\quad x\to a,$$
$$\varphi(x)\to1 \quad\text{и}\quad \psi(x)\to\infty \quad\text{при}\quad x\to a$$

получаем неопределенности соответственно вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Здесь выгодно логарифмировать функцию $f(x)$.

Пример 5. Найти

$$A = \lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}. \qquad (7)$$

Выражение (7) представляет собой неопределенность вида 1^∞. Логарифмируя выражение (7) и используя непрерывность логарифмической функции, находим

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \right] = \lim_{x \to \pi/2} \left[\ln (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Применяя правило Лопиталя к получившейся неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, будем иметь

$$\ln A = \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \right) = \lim_{x \to \pi/2} (-\sin x \cos x) = 0;$$

отсюда $A = 1$.

§ 4. Формула Тейлора для многочлена

Пусть данный многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (1)$$

требуется разложить по степеням бинома $x - x_0$, где x_0 — некоторое число. Эту задачу можно решить элементарно, используя тождество $x \equiv x_0 + (x - x_0)$. Однако можно указать более простой прием. Пусть

$$P(x) =$$
$$= A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + \ldots + A_n (x - x_0)^n \qquad (2)$$

— искомое разложение, коэффициенты которого $A_0, A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ требуется найти. Полагая $x = x_0$ в тождестве (2), получим $P(x_0) = A_0 + 0$; отсюда

$$A_0 = P(x_0). \qquad (3)$$

Дифференцируя тождество (2), будем иметь

$$P'(x) = A_1 + 2A_2 (x - x_0) + \ldots + nA_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Отсюда, полагая $x = x_0$, получим

$$A_1 = P'(x_0).$$

После вторичного дифференцирования находим

$$P''(x) = 2! A_2 + \ldots + n(n-1) A_n (x - x_0)^{n-2}$$

и при $x=x_0$ имеем $P''(x_0)=2!A_2$, т. е.

$$A_2=\frac{P''(x_0)}{2!}. \qquad (4)$$

Для определения дальнейших коэффициентов разложения (2) можно использовать тот же прием. Довольно очевидно, что имеет место общая формула

$$A_k=\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (5)$$

где по определению полагают $P^{(0)}(x)=P(x)$ и $0!=1$. Формулу (5) можно строго доказать методом математической индукции.

Подставляя коэффициенты (5) в разложение (2), получим *формулу Тейлора* для многочлена

$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+$$
$$+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

или короче

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (6)$$

Заметим, что, как нетрудно убедиться, старшие коэффициенты разложений (1) и (2) совпадают, т. е. $A_n=a_n$. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0)=a_n.$$

Если положить $x_0=0$, то правая часть равенства (6) будет тождественно равна правой части многочлена (1). Поэтому справедливы равенства

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!}=a_k \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Пример. Многочлен $P(x)=1-2x+3x^2-4x^3$ разложить по степеням бинома $x+1$.

Здесь $x_0=-1$. Имеем

$$P'(x)=-2+6x-12x^2, \quad P''(x)=6-24x, \quad P'''(x)=-24$$

и

$$P(-1)=10, \quad P'(-1)=-20, \quad P''(-1)=30, \quad P'''(-1)=-24.$$

Таким образом, $P(x)=10-20(x+1)+15(x+1)^2-4(x+1)^3$.

§ 5. Бином Ньютона

Рассмотрим функцию

$$f(x)=(a+x)^n, \qquad (1)$$

где n—натуральное число. Полагая $x_0=0$ и используя

формулу Тейлора (6) из § 4, получим

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n, \tag{2}$$

где

$$A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Так как из (1) получаем

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)](a+x)^{n-k},$$

то $f(0) = a^n$ и

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)]\,a^{n-k}$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, $A_0 = a^n$ и

$$A_k = \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\,a^{n-k} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Числа A_k носят название *биномиальных коэффициентов* и условно обозначаются следующим образом:

$$A_k = C_n^k, \tag{4}$$

где C_n^k называется числом сочетаний из n элементов по k (комбинаторный смысл чисел C_n^k будет выяснен позднее, см. гл. XXV, § 10).

Итак, на основании формулы (2) имеем *биномиальную формулу Ньютона*

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n. \tag{5}$$

В частности, при $a = 1$ получаем

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{5'}$$

§ 6. Формула Тейлора для функции

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную N-го порядка $f^{(N)}(x)$[1] в интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Используя результаты предыдущего параграфа, построим

---

[1]) Отсюда, по смыслу операции дифференцирования, получаем, что в интервале (a, b) существуют непрерывные производные $f(x) = f^{(0)}(x),\ f'(x),\ \ldots,\ f^{(N-1)}(x)$.

многочлен **Тейлора**

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (1)$$

степени n, где $n \leqslant N$.

Многочлен $P_n(x)$ можно рассматривать как некоторое приближение (*аппроксимацию*) данной функции. Обозначая через $R_n(x)$ соответствующую ошибку (так называемый *остаточный член*), будем иметь

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x). \qquad (2)$$

Покажем, что при $x \to x_0$ остаточный член $R_n(x)$ будет бесконечно малой порядка выше n (*теорема Пеано*). В самом деле, рассмотрим предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}. \qquad (3)$$

Очевидно, мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя (§ 3) последовательно n раз и учитывая непрерывность производной $f^{(n)}(x)$, находим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\left[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right]}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-\left[f''(x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}\right]}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-[f^{(n)}(x_0)]}{n(n-1)\ldots 1}=0.$$

Следовательно,

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]. \qquad (4)$$

Таким образом, получаем *локальную формулу Тейлора*:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]\,^{1)}. \qquad (5)$$

---

[1]) В общем случае, формула (5) оказывается содержательной, если x принадлежит достаточно малой окрестности U_{x_0} точки x_0.

В частном случае, при $a<0<b$ и $x_0=0$, будем иметь так называемую *локальную формулу Маклорена*:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n). \qquad (6)$$

Пример. Функцию $f(x)=\sin x$ аппроксимировать в окрестности точки $x_0=0$ многочленом Тейлора $P_3(x)$ третьей степени.

Имеем $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$. Отсюда $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$. На основании формулы (6) получаем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3). \qquad (7)$$

Формулу (7) часто используют для нахождения синусов малых углов x, причем следует иметь в виду, что здесь x выражен в радианах.

Полагая $x-x_0=h$, $x=x_0+h$ и учитывая, что

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta f(x_0),$$

формулу (5) можно записать в виде

$$\Delta f(x_0)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(h^n). \qquad (8)$$

§ 7. Экстремум функции одной переменной

Определение. *Говорят, что при значении x_1 аргумента x функция $f(x)$ имеет* **максимум** *$f(x_1)$, если в некоторой окрестности точки x_1* (возможно, весьма малой) *выполнено неравенство* (рис. 113)

$$f(x_1)>f(x) \quad (x\neq x_1).$$

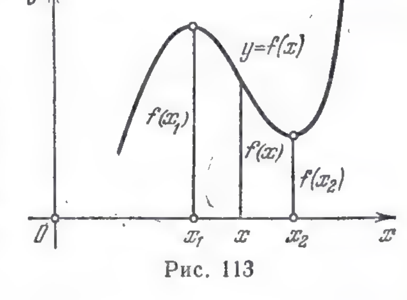


Рис. 113

Аналогично говорят, что при значении x_2 аргумента x функция $f(x)$ имеет **минимум** *$f(x_2)$, если в некоторой окрестности точки x_2 имеет место неравенство* (рис. 113)

$$f(x_2)<f(x) \quad (x\neq x_2).$$

Максимум или минимум функции называется *экстремумом функции*, а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума функции* (соответственно: *точками максимума* или *точками минимума функции*).

Из определения следует, что экстремум функции, вообще говоря, имеет **локальный характер** — это наибольшее или наименьшее значение функции по сравнению с **близлежащими значениями** ее. Поэтому наличие экстремума функции при некотором значении аргумента нисколько не зависит от того, как ведет себя функция вдали от этого значения. С этой точки зрения понятно, что минимум функции может быть больше максимума, — подобно тому, как впадина в горах может иметь бо́льшую отметку над уровнем моря, чем небольшая вершина.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет экстремум в точке $x_0 \in [a, b]$. Если x_0 — внутренняя точка отрезка, то разность

$$f(x) - f(x_0) \qquad (x \neq x_0)$$

сохраняет постоянный знак в некоторой **двусторонней окрестности** $x_0 - h < x < x_0 + h \ (x \neq x_0)$ точки x_0. Такой экстремум называется *двусторонним*. Например, функция $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ имеет двусторонний максимум при $x_0 = 0$, так как $f(x) < f(x_0) = 1$ при $-1 < x < 1$, $x \neq 0$. Если же x_0 — концевая точка отрезка $[a, b]$, например, $x_0 = a$, то $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак лишь в некоторой **односторонней** окрестности $a = x_0 < x < x_0 + h$ точки x_0. Такой экстремум называется *односторонним* (*краевым*). Например, функция $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ имеет односторонний минимум при $x_0 = -1$ и при $x_0 = 1$.

В дальнейшем под словом экстремум мы будем понимать **двусторонний экстремум**, т. е. будем предполагать, что для точки экстремума x_0 данной функции $f(x)$ имеется некоторая окрестность $0 < |x - x_0| < h$ точки x_0, в которой разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет постоянный знак.

1. Необходимое условие экстремума функции

Теорема. *В точке экстремума (двустороннего) дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 есть точка минимума функции $f(x)$. Следовательно,

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0),$$

если $\Delta x_0 \neq 0$ достаточно мало по абсолютной величине.

Отсюда

$$\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} > 0, \text{ если } \Delta x_0 > 0,$$

и

$$\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} < 0, \text{ если } \Delta x_0 < 0.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x_0 \to 0$, для производной в точке x_0, равной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0},$$

соответственно получим

$$f'(x_0) \geqslant 0, \text{ если } \Delta x_0 > 0, \text{ и } f'(x_0) \leqslant 0, \text{ если } \Delta x_0 < 0.$$

Так как значение производной $f'(x_0)$ не должно зависеть от способа стремления Δx_0 к нулю, то отсюда следует, что

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

Теорема доказана.

Геометрическая иллюстрация. Геометрически условие (1) обозначает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox (рис. 114, *а*).

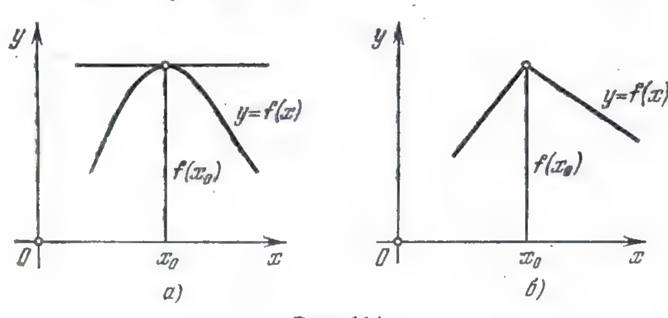


Рис. 114

Следствие. *Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная функции равна нулю или не существует.*

Действительно, если в точке x_0 экстремума функции $f(x)$ существует производная $f'(x_0)$, то в силу доказанной теоремы эта производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

То, что в точке экстремума непрерывной функции производная может не существовать, показывает пример функции, график которой имеет форму «ломаной» (рис. 114, *б*).

Те значения аргумента x, которые для данной функции $f(x)$ обращают в нуль ее производную $f'(x)$ или для которых производная $f'(x)$ не существует (например, обращается в бесконечность), называются **критическими значениями** аргумента.

2. Достаточные условия экстремума функции

Из того обстоятельства, что $f'(x_0)=0$, вовсе не следует, что функция $f(x)$ имеет экстремум при $x=x_0$.

В самом деле, пусть $f(x)=x^3$. Тогда $f'(x)=3x^2$ и, следовательно, $f'(0)=0$. Однако значение $f(0)$ не является экстремумом данной функции, так как разность $f(x)-f(0)$ меняет знак при изменении знака аргумента x (см. рис. 57).

Таким образом, не для всякого критического значения аргумента функции $f(x)$ имеет место экстремум этой функции. Поэтому мы наряду с необходимым условием дадим достаточные условия экстремума функции.

Теорема 1 (первое правило). *Если дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что для некоторого значения x_0 ее аргумента x производная $f'(x)$ равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение*[1], *то число $f(x_0)$ является экстремумом функции $f(x)$, причем:*

1) *функция $f(x)$ имеет максимум при $x=x_0$, если изменение знака производной $f'(x)$ происходит с плюса на минус;*

2) *функция $f(x)$ имеет минимум при $x=x_0$, если изменение знака производной $f'(x)$ происходит с минуса на плюс.*

Доказательство. 1) Пусть $f'(x_0)=0$, причем

$$f'(x)>0 \text{ при } x_0-\varepsilon<x<x_0$$

и

$$f'(x)<0 \text{ при } x_0<x<x_0+\varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Отсюда в силу теоремы 2 из § 2 следует, что функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[x_0-\varepsilon,\ x_0]$ и убывает на отрез-

---

[1]) Мы говорим, что некоторая функция $F(x)$ меняет свой знак при переходе через значение x_0, если существует столь малое положительное ε такое, что

$$F(x)<0 \text{ при } x_0-\varepsilon<x<x_0 \text{ и } F(x)>0 \text{ при } x_0<x<x_0+\varepsilon$$

или наоборот.

ке $[x_0, x_0+\varepsilon]$. Следовательно, в непосредственной близости к значению x имеем

$$f(x_0) > f(x), \text{ если } x < x_0,$$

и также

$$f(x_0) > f(x), \text{ если } x > x_0.$$

Иными словами, при $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум.

2) Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Замечание. Можно доказать, что теорема остается верной, если в критической точке x_0 производная $f'(x_0)$ не существует, причем функция $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$.

Теорема 1′. *Если для дифференцируемой функции $f(x)$ ее производная $f'(x)$ при $x=x_0$ обращается в нуль, но при переходе через это значение производная сохраняет постоянный знак, то при $x=x_0$ функция $f(x)$ не имеет экстремума.*

Доказательство. В самом деле, если, например, $f'(x_0)=0$ и

$$f'(x)>0 \text{ при } x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon, \; x\neq x_0,$$

то функция $f(x)$ возрастает как на отрезке $[x_0-\varepsilon, x_0]$, так и на отрезке $[x_0, x_0+\varepsilon]$. Следовательно, функция не имеет ни максимума, ни минимума при $x=x_0$.

Пользуясь этими теоремами при исследовании дифференцируемой функции $f(x)$ на экстремум, сначала находят критические значения аргумента функции, т. е. те значения x_0, для которых

$$f'(x_0)=0,$$

а затем, выбрав для каждого такого значения x_0 столь малый интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, чтобы он не содержал других критических значений (конечно, если это возможно!), проверяют характер этого значения по следующей схеме:

$f'(x_0-h)$	$f'(x_0+h)$	Заключение
+	+	Экстремума нет
+	−	Максимум
−	+	Минимум
−	−	Экстремума нет

где переменная h пробегает интервал

$$0<h<\varepsilon.$$

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.

Решение. Находим производную

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3).$$

Приравнивая ее нулю и решая соответствующее квадратное уравнение, получаем корни производной: $x_1=1$ и $x_2=3$. Отсюда

$$f'(x)=3(x-1)(x-3).$$

Исследуем, как изменяется знак $f'(x)$ вблизи значения $x=1$. При любом достаточно малом положительном числе h имеем

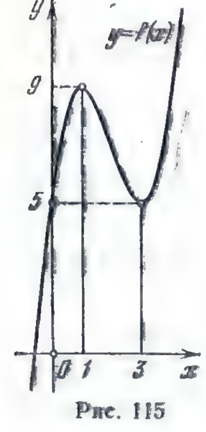


Рис. 115

x	$f'(x)$
$1-h$	$+$
$1+h$	$-$

Следовательно, функция $f(x)$ при $x=1$ имеет максимум, равный $f(1)=9$. Аналогично, для значения $x=3$ получим

x	$f'(x)$
$3-h$	$-$
$3+h$	$+$

Поэтому функция $f(x)$ при $x=3$ имеет минимум, причем $f(3)=5$.

График функции $y=x^3-6x^2+9x+5$ изображен на рис. 115.

Теорема 2 (второе правило). *Если для дифференцируемой функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 ее первая производная $f'(x)$ равна нулю, а вторая производная $f''(x)$ существует и отлична от нуля, т. е.*

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум; а именно: 1) если $f''(x_0)>0$, то $f(x_0)$ — минимум функции $f(x)$, и 2) если $f''(x_0)<0$, то $f(x_0)$ — максимум функции $f(x)$.

Доказательство. 1) Положим сначала, что $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$. Пусть $x=x_0+\Delta x_0$ — точка, близкая к x_0. Так как вторая производная $f''(x)$ есть производная от первой производной $f'(x)$, то имеем

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x_0)-f'(x_0)}{\Delta x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $f'(x_0)=0$). Таким об-

разом, переменная величина $\frac{f'(x)}{x-x_0}$ стремится к пределу $f''(x_0) \neq 0$, а значит, начиная с некоторого момента, эта величина имеет знак своего предела (гл. VII, § 6, лемма), т. е. в нашем случае знак плюс. Поэтому

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0 \text{ при } 0 < |x-x_0| < \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число. Отсюда получаем, что числитель и знаменатель дроби $\frac{f'(0)}{x-x_0}$ имеют одинаковые знаки и, следовательно,

$$f'(x) < 0 \text{ при } x_0-\varepsilon < x < x_0$$

и

$$f'(x) > 0 \text{ при } x_0 < x < x_0+\varepsilon.$$

Мы видим, что производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс. На основании теоремы 1 число $f(x_0)$ есть минимум функции $f(x)$.

2) Аналогично доказывается, что если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ — максимум функции $f(x)$.

Теория экстремума функций имеет многочисленные практические применения.

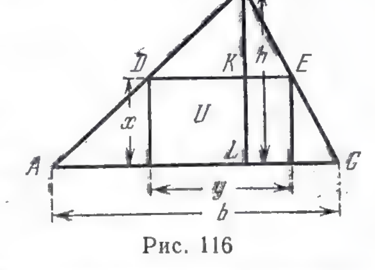


Рис. 116

Задача. Дан треугольник ABC, основание которого $AC=b$ и высота $BL=h$ (рис. 116). Найти прямоугольник наибольшей площади, который можно вписать в этот треугольник.

Обозначим высоту KL искомого прямоугольника через x, основание DE через y (рис. 116). Тогда площадь его

$$U = xy.$$

Переменные x и y не являются независимыми, они связаны некоторым соотношением. В самом деле, из подобия треугольников DBE и ABC, учитывая, что высоты их BK и BL пропорциональны основаниям DE и AC, имеем

$$\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC}.$$

или так как $BK=h-x$, $DE=y$, $BL=h$, $AC=b$, то, следовательно,

$$\frac{h-x}{h}=\frac{y}{b}.$$

Отсюда

$$y=\frac{b}{h}(h-x).$$

Исключая y из выражения для U, находим

$$U=\frac{b}{h}(h-x)\,x=\frac{b}{h}(hx-x^2). \qquad (2)$$

Ищем максимум этой функции. Дифференцируя, получим

$$U'=\frac{b}{h}(h-2x).$$

Приравнивая производную U' нулю, находим

$$h-2x=0, \text{ или } x=h/2.$$

Легко видеть, что это значение x действительно даст максимум функции U. В самом деле, составляя вторую производную, будем иметь

$$U''=-\frac{2b}{h}<0.$$

Следовательно, при $x=h/2$ площадь U имеет максимум, причем из формулы (2) получаем

$$U_{max}=bh/4.$$

Таким образом, площадь наибольшего прямоугольника, вписанного в треугольник, равна половине площади этого треугольника.

§ 8. Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

Определение. *График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется* вогнутым вверх[1] (или выпуклым вниз[2]) *в промежутке $\langle a, b\rangle$, если соответствующая часть кривой*

$$y=f(x) \quad (x\in\langle a, b\rangle) \qquad (1)$$

[1]) То есть в положительном направлении оси Oy.
[2]) То есть в отрицательном направлении оси Oy.

расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$ (рис. 117, *а*).

Аналогично, график дифференцируемой функции $y=f(x)$ *называется* ***выпуклым вверх*** *(или* ***вогнутым вниз****)*

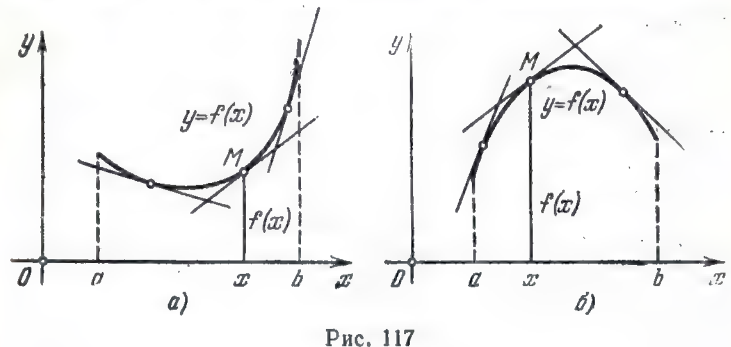


Рис. 117

в промежутке $\langle a, b\rangle$, *если соответствующая часть кривой* (1) *расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке* $M(x, f(x))$ (рис. 117, *б*).

Достаточные условие вогнутости (выпуклости) графика функции.

Теорема. 1) *Если для дважды дифференцируемой функции* $y=f(x)$ *вторая ее производная* $f''(x)$ *положительна внутри промежутка* $\langle a, b\rangle$, *то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке.*

2) *Если же вторая производная* $f''(x)$ *отрицательна внутри промежутка* $\langle a, b\rangle$, *то график функции* $y=f(x)$ *вогнут вниз в этом промежутке.*

Рис. 118

Доказательство. 1) Пусть $f''(x)>0$ при $a<x<b$ и x_0 — любая точка промежутка $\langle a, b\rangle$. Сравним в точке x ординату y кривой $y=f(x)$ с ординатой $\bar{y}$ ее касательной M_0N, проведенной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ (рис. 118). Так как угловой коэффициент касательной M_0N равен $f'(x_0)$, то (см. гл. III, § 3)

$$\bar{y}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Отсюда

$$\delta = y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Используя теорему Лагранжа (§ 1), будем иметь

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x)$.

Поэтому из (2) получаем

$$\delta = (x - x_0)[f'(\xi) - f'(x_0)]. \tag{3}$$

Далее, так как $f''(x) = [f'(x)]' > 0$, то $f'(x)$ — возрастающая функция.

Пусть $x < x_0$; тогда, очевидно, $\xi < x_0$ и, следовательно, в силу возрастания $f'(x)$ имеем $f'(\xi) < f'(x_0)$. В этом случае из формулы (3) получаем $\delta > 0$.

Если теперь $x > x_0$, то $\xi > x_0$ и поэтому $f'(\xi) > f(x_0)$. Из формулы (3) снова выводим $\delta > 0$.

Таким образом, при $x \neq x_0$ имеем

$$\delta = y - \overline{y} > 0, \text{ т. е. } y > \overline{y}. \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что при $a < x < b$ кривая $y = f(x)$ расположена выше своих касательных и, значит, график функции $y = f(x)$ вогнут вверх на промежутке $\langle a, b \rangle$.

2) Аналогично доказывается, что если $f''(x) < 0$ при $a < x < b$, то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз на промежутке $\langle a, b \rangle$.

Определение. *Точкой перегиба графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот* (рис. 119).

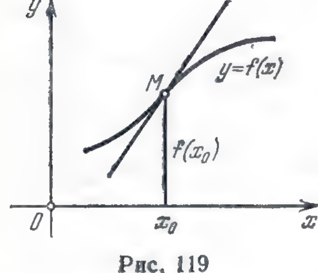


Рис. 119

Теорема. *Если для функции $y = f(x)$ вторая производная ее $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль и при переходе через эту точку меняет свой знак на обратный, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.*

Доказательство. Предположим, что вторая производная $f''(x)$ в точке M обращается в нуль и меняет свой знак, например, с плюса на минус. Тогда левее точки M вторая производная функции $f(x)$ положительна, а потому при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ график этой функции вогнут вверх;

правее точки M вторая производная $f''(x)$ отрицательна, и следовательно, при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх. Таким образом, в точке M кривая $y = f(x)$ меняет вогнутость на выпуклость, и поэтому точка M есть точка перегиба этой кривой.

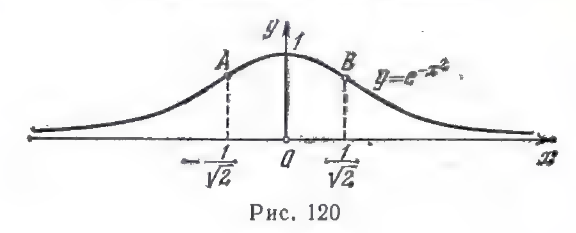


Рис. 120

Замечание. В точке перегиба x_0 функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ может также не существовать; например, обращаться в бесконечность.

Пример. Пусть дана *кривая Гаусса* $y = e^{-x^2}$.

Имеем

$$y' = -2xe^{-x^2} \quad \text{и} \quad y'' = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}.$$

Вторая производная y'' обращается в нуль, если $x^2 - \frac{1}{2} = 0$; отсюда

$$x_1 = -1/\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x_2 = 1/\sqrt{2}.$$

Изменение знака второй производной характеризуется следующей таблицей:

x	$-\infty < x < -1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2} < x < +\infty$
y''	$+$	$-$	$+$

Следовательно, точки $A(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{e})$ и $B(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{e})$ являются точками перегиба данной кривой (рис. 120).

§ 9. Приближенное решение уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$. Значение $\xi \in \langle a, b \rangle$, удовлетворяющее уравнению (1), т. е. такое, что $f(\xi) = 0$, называется *корнем* этого уравнения (или *нулем* функции $f(x)$).

Геометрически корни уравнения (1) представляют собой абсциссы точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Ox (рис. 121).

Для геометрического решения уравнения (1) иногда удобно заменить его равносильным уравнением

$$\varphi(x)=\psi(x). \qquad (2)$$

Тогда корни уравнения (1) находятся как абсциссы точек пересечения кривых $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

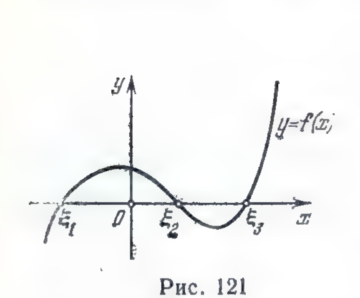


Рис. 121

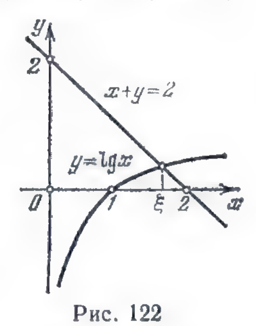


Рис. 122

Пример 1. Графически решить уравнение

$$x+\lg x=2. \qquad (3)$$

Очевидно, имеем $\lg x=2-x$. Отсюда корень уравнения (2) представляет собой абсциссу точки пересечения логарифмической кривой $y=\lg x$ и прямой $x=2-x$ (рис. 122).

Построив на миллиметровой бумаге эти кривые, приближенно находим корень уравнения (3): $\xi\approx 1{,}77$.

Геометрически наглядной представляется теорема: *если непрерывная функция* $f(x)$ *на концах отрезка* $[\alpha, \beta]\subset\langle a, b\rangle$ [1]) *принимает значения разных знаков, т. е.* $f(\alpha)f(\beta)<0$, *то внутри отрезка* $[\alpha, \beta]$ *имеется по меньшей мере один нуль функции* $f(x)$ (т. е. обязательно существует корень уравнения $f(x)=0$).

Этот корень будет единственным, если $f'(x)$ сохраняет постоянный знак на (α, β) (ввиду монотонности функции $f(x)$).

Предполагая, что уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$, имеет единственный корень ξ внутри отрезка $[\alpha, \beta]\subset\langle a, b\rangle$, причем выполнено условие $f(a)f(\beta)<0$, укажем некоторые простые приемы для приближенного нахождения этого корня.

---

[1]) Запись $[\alpha, \beta]\subset\langle a, b\rangle$ означает, что отрезок $[\alpha, \beta]$ содержится в промежутке $\langle a, b\rangle$.

А. Метод половинного деления. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Разделим отрезок $[\alpha, \beta]$ пополам, и пусть γ есть середина этого отрезка. Если $f(\gamma) = 0$, то γ есть искомый уровень. Если $f(\gamma) \neq 0$, то через $[\alpha_1, \beta_1]$ обозначим ту из половин $[\alpha, \gamma]$ или $[\gamma, \beta]$ на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Затем повторим прием половинного деления и т. д. В результате: или мы найдем точный корень уравнения $f(x) = 0$, или же получим сужающуюся последовательность отрезков

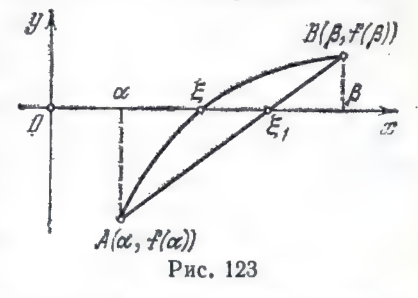


Рис. 123

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \ldots,$$

внутри которых находится искомый корень ξ («метод вилки»).

Так как длина n-го отрезка $[\alpha_n, \beta_n]$, равная $\frac{\beta-\alpha}{2^n}$, стремится к 0 при $n \to \infty$, то, повторяя этот прием достаточно большое число раз и принимая $\xi \approx \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$, можно определить искомый корень ξ с любой, заранее заданной точностью.

Б. Метод хорд. Заменим дугу $\overset{\frown}{AB}$ кривой $y = f(x)$ $(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ ее хордой $\overline{AB}$, проходящей через концевые точки $A(\alpha, f(\alpha))$ и $B(\beta, f(\beta))$, и принимаем за приближенное значение корня ξ уравнения $f(x) = 0$ абсциссу ξ_1 точки пересечения хорды $\overline{AB}$ с осью Ox (рис. 123).

Если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то это равносильно тому, что мы в качестве приближенного значения корня ξ берем точку ξ_1, делящую отрезок $[\alpha, \beta]$ в отношении $|f(\alpha)|:|f(\beta)|$ (*способ пропорциональных частей*).

Уравнение хорды $\overline{AB}$ имеет вид (см. гл. III, § 4)

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha). \qquad (4)$$

Полагая $y = 0$ в уравнении (4), находим точку пересечения $x = \xi_1$ хорды $\overline{AB}$ с осью Ox (рис. 123):

$$\xi_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}(\beta - \alpha). \qquad (5)$$

Число ξ_1 принимают за первое приближение корня ξ. Если $f(\xi_1) \neq 0$, то формулу (5) можно применить к тому из отрезков $[\alpha, \xi_1]$ или $[\xi_1, \beta]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения различных знаков, и т. д.

Пример 2. Методом хорд определить корень уравнения

$$f(x) \equiv x^3 + x - 12 = 0. \qquad (6)$$

Для приближенного нахождения корня уравнения (6) можно нарисовать эскизы графиков функций $y = x^3$ и

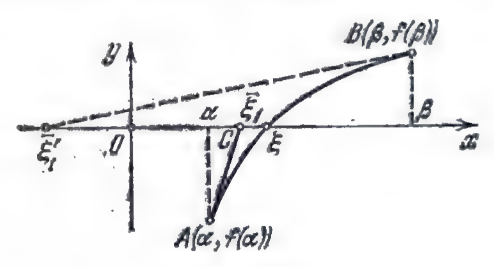


Рис. 124

$y = 12 - x$. Грубой прикидкой мы обнаруживаем, что искомый корень, т. е. абсцисса точки пересечения графиков, находится в интервале (2, 3). Действительно,

$$f(2) = 8 + 2 - 12 = -2 \text{ и } f(3) = 27 + 3 - 12 = +18.$$

Поэтому можно принять $\alpha = 2$ и $\beta = 3$.

Применяя формулу (5), получим приближенное значение корня:

$$\xi_1 = 2 - \frac{-2}{18+2}(3-2) = 2{,}1.$$

Заметим, что

$$f(\xi_1) = 9{,}261 + 2{,}1 - 12 = -0{,}639.$$

Поэтому для уточнения значения корня формулу (5) следует применить к отрезку [2,1; 3].

В. Метод касательных. Заменим теперь дугу $\widehat{AB}$ кривой $y = f(x)$ касательной AC, проведенной в точке $A(\alpha, f(\alpha))$ (рис. 124). Так как угловой коэффициент касательной AC равен $f'(\alpha)$, то ее уравнение имеет вид

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha). \qquad (7)$$

Отсюда, полагая $y=0$, находим для корня ξ его приближенное значение

$$\overline{\xi_1}=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad (8)$$

(*формула Ньютона*).

Заметим, что если на нашем чертеже (рис. 124) провести касательную в точке $B[\beta, f(\beta)]$, то точка пересечения ее $\overline{\xi_1'}$ с осью Ox даст плохое приближение корня ξ. Здесь следует придерживаться правила: *если вторая производная функции $f''(x)$ сохраняет постоянный знак в интервале* (α, β), *то касательную следует проводить в той концевой точке дуги $\overset{\frown}{AB}$, для которой знак функции совпадает со знаком ее второй производной.*

Пример 3. Методом касательных определить корень уравнения (6), лежащий в интервале (2, 3).

Здесь $f''(x)=6x>0$ при $2\leqslant x\leqslant 3$, причем $f(3)=+18$. Поэтому в формуле (8) полагаем $\alpha=3$. Так как $f'(x)=$ $=3x^2+1$ и $f'(3)=28$, то имеем

$$\overline{\xi_1}=3-\frac{18}{28}=2,36.$$

Для контроля заметим, что

$$f(\overline{\xi_1})=13,14+2,36-12=+3,5.$$

Так как в нашем случае $\xi_1<\xi<\overline{\xi_1}$, где $\xi_1=2,10$ и $\overline{\xi_1}=2,36$, то можно положить

$$\xi\approx\frac{1}{2}(\xi_1+\overline{\xi_1})=\frac{1}{2}(2,10+2,36)=2,23.$$

Здесь

$$f(2,23)=11,09+2,23-12=1,32.$$

Для уточнения корня можно применить методы хорд и касательных к отрезку [2,10; 2,23], и т. д.

§ 10. Построение графиков функций

В предыдущих параграфах было показано, как с помощью производных двух первых порядков изучаются общие свойства функции. Пользуясь результатами этого изучения, можно составить ясное представление о характере функции и, в частности, построить математически грамотный эскиз ее графика.

Исследование функции $y=f(x)$ (которую мы будем предполагать элементарной) в простейших случаях целесообразно проводить по следующей схеме.

1) Анализируя свойства функции $f(x)$, определяем *области существования* ее; для простоты предположим, что это будет некоторый промежуток $\langle a, b\rangle$. Полезно также выяснить симметрию графика (четность или нечетность, периодичность и т. п.).

2) Находим *точки разрыва* функции. Исследуем также поведение функции при $x \to a$ и $x \to b$, где a и b — граничные области существования функции.

3) Решая уравнение

$$f(x)=0, \tag{1}$$

определяем корни (нули) функции. Выясняем знак функции в различных областях, учитывая, что элементарная функция может менять свой знак, лишь проходя через нуль или через точку разрыва.

4) Решая уравнение

$$f'(x)=0, \tag{2}$$

находим *критические значения аргумента для функции* $f(x)$. Изучая затем знак производной $f'(x)$ в каждом из промежутков между двумя соседними критическими значениями, определяем промежутки возрастания и убывания функции и выясняем характер этих критических значений.

5) Решая уравнение

$$f''(x)=0, \tag{3}$$

определяем *критические значения аргумента для производной* $f'(x)$. Выясняя затем знак производной $f''(x)$ в каждом из промежутков между двумя соседними критическими значениями аргумента для производной $f'(x)$, устанавливаем промежутки выпуклости и вогнутости вверх графика функции $f(x)$ и находим его точки перегиба.

В более сложных случаях следует исследовать также те точки, в которых производные $f'(x)$ и $f''(x)$ не существуют.

Для решения уравнений (1), (2) и (3), возможно, придется применить приближенные методы (см. § 9).

Составляя в заключение таблицу значений функции для ее *характеристических точек* (граничные точки области существования функции, точки разрыва, точки пересечения графика функции с осями координат,

точки экстремума, точки перегиба и т. п.) и учитывая результаты проведенного выше исследования, изображаем эту функцию графически.

Заметим, что иногда достаточно проводить неполное исследование функции.

Пример. Построить график функции $y=x+\sqrt{1-x}$.

Исследуем функцию по вышеприведенной схеме.

1) Функция определена, если $0 \leqslant 1-x < +\infty$. Отсюда область существования ее: $-\infty < x \leqslant 1$.

2) Точек разрыва нет, причем

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 1} y = y(1) = 1.$$

3) Решая уравнение $x+\sqrt{1-x}=0$, получаем корень функции

$$x_0 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62;$$

при этом $y<0$, если $-\infty < x < x_0$, и $y>0$, если $x_0 < x \leqslant 1$.

4) Находим производную

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Приравнивая ее нулю, получаем критическую точку $x_1 = 3/4$. Кроме того, очевидно, y' обращается в ∞ при $x=1$. Поэтому $x_2=1$ также будет критической точкой.

Промежутками монотонности функции являются $(-\infty,\ 3/4)$ и $(3/4,\ 1)$, причем, как нетрудно убедиться, исследуя знак производной, функция возрастает в первом промежутке и убывает во втором. Следовательно, x_1 есть точка максимума функции. В точке x_2, очевидно, функция имеет краевой минимум.

5) Находим вторую производную

$$y'' = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}.$$

Так как вторая производная всюду отрицательна, то график функции вогнут вниз и точек перегиба нет.

Результаты наших исследований объединяем в таблицу. Примерный график функции изображен на рис. 125.

x	y	y'	y''	Примечание
$-\infty$	$-\infty$	+	−	Функция возрастает
$x_0 \approx -1{,}62$	0	+	−	
0	1	+	−	
$x_1 = 0{,}75$	1,25	0	−	Максимум функции
...	...	−	−	Функция убывает
1	1	$-\infty$		

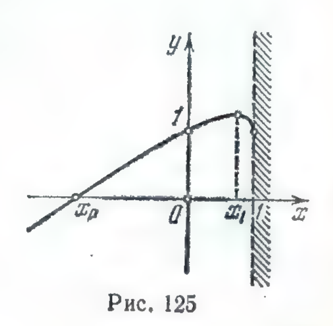


Рис. 125

Упражнения

1. Найти приращение функции $f(x)=x^3$ на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 2$ и проверить теорему о конечном приращении функции.

2. Проверить теорему о корнях производной для функции

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

на отрезках [1, 2] и [2, 3].

Определить промежутки монотонности функций:

3. $f(x)=x^2-4x-1$. 4. $f(x)=3x-x^3$.

5. $f(x)=xe^{-x}$.

Найти следующие пределы функций:

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. 5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\ln(1+x)}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$. Получить отсюда формулу для приближенного «спрямления малых дуг»: $x\approx\frac{1}{3}(2\sin x+\operatorname{tg} x)$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$. 5.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1{,}01^x}$. 5.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[100]{x}}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. 5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arcsin\frac{2}{x}\right)$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. 5.11. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$. 5.12. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Определить значения экстремумов функций:

6. $y=x(a-x)$ $(a>0)$. 7. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-1$.

8. $y=\frac{2x}{1+x^2}$. 9. $y=\sqrt{2+x-x^2}$. 10. $y=xe^{-2x}$.

11. В полукруг радиуса a вписать прямоугольник наибольшей площади.

12. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади, стороны которого параллельны осям эллипса.

13. В шар радиуса a вписать конус наибольшего объема.

14. При каких размерах коробочка, изготовленная из квадратного листа бумаги со стороной a, имеет наибольшую вместимость?

15. Определить точки перегиба графика функции $y=x^2-x^3$.

Построить графики функций:

16. $y=3x-x^3$. 17. $y=x^2(2-x)^2$. 18. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$.

19. $y=x+\frac{1}{x}$. 20. $y=\frac{x}{1+x}$. 21. $y=\frac{8}{4-x^2}$.

22. $y=x\sqrt{1-x}$. 23. $y=\sqrt{(1-x)/x}$.

24. $y=\sin x+\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

25. $y=x\ln x$ [1]. 26. $y=xe^{-x}$ [1]. 27. $y=x-\operatorname{arctg} x$.

---

[1]) См. указание в «Ответах».

ГЛАВА XII

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Понятие о дифференциале функции

Пусть имеем некоторую *дифференцируемую* функцию

$$y = f(x).$$

Приращение Δy функции y служит важной характеристикой изменения этой функции на заданном конечном отрезке $[a, b]$. Однако непосредственное определение приращения функции иногда затруднительно. Тогда обычно поступают следующим образом: разбивают отрезок $[a, b]$ на конечное число достаточно малых отрезков $[x, x+\Delta x]$ и приближенно считают, что на каждом из них прирост функции происходит по закону прямой пропорциональности (например, малый элемент кривой линии рассматривают как прямолинейный; неравномерное движение точки в течение малого промежутка времени трактуют как равномерное и т. п., где «малость» понимается в известном смысле). Иными словами, предполагается, что на достаточно малом отрезке $[x, x+\Delta x]$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta y \approx k\,\Delta x,$$

где коэффициент пропорциональности k не зависит от Δx, но, вообще говоря, зависит от x. Если при этом окажется, что при надлежащем подборе коэффициента пропорциональности погрешность $\Delta y - k\,\Delta x$ будет бесконечно малой величиной высшего порядка относительно Δx, т. е. отношение

$$\frac{\Delta y - k\,\Delta x}{\Delta x} = \alpha \qquad (1)$$

будет бесконечно малым при $\Delta x \to 0$, то величина

$$dy = k\,\Delta x$$

называется *дифференциалом функции* y в точке x (здесь буква d — знак дифференциала). В этом случае, как сле-

дует из соотношения (1), справедливо равенство

$$\Delta y = k\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \qquad (2)$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Иначе говоря (см. гл. VII, § 8),

$$\Delta y = dy + o(\Delta x).$$

Определение. *Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная приращению независимой переменной и отличающаяся от приращения функции на бесконечно малую функцию высшего порядка малости по сравнению с приращением независимой переменной.*

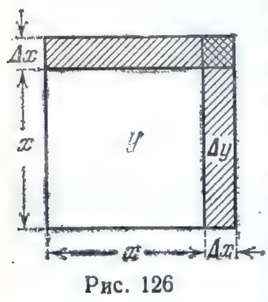


Рис. 126

Слагаемое $k\,\Delta x$ в формуле (2) часто называют *главной линейной частью* приращения функции (или *главным линейным членом приращения*). Поэтому можно сказать: *дифференциал функции представляет собой главную линейную часть бесконечно малого приращения этой функции.*

Пример 1. Пусть функция $y = x^2$ есть площадь квадрата, сторона которого равна x (рис. 126). Если стороне x дать приращение Δx, то новое ее значение станет $x + \Delta x$ и, следовательно, площадь y квадрата получит приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2, \quad \text{или} \quad \Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Первое слагаемое суммы, стоящей в правой части последнего равенства, очевидно, является главной линейной частью приращения функции при $\Delta x \to 0$. Поэтому

$$dy = 2x\,\Delta x.$$

На рис. 126 приращение Δy функции y изображается площадью всей заштрихованной части, тогда как дифференциал dy функции изображается площадью заштрихованной части без площади маленького квадрата, находящегося в правом верхнем углу большого квадрата.

Теорема единственности дифференциала. *Данная функция может иметь только один дифференциал.*

Доказательство. В самом деле, пусть функция $y = f(x)$ имеет два дифференциала: $dy = k\,\Delta x$ и $d_1 y = k_1\,\Delta x$. В силу определения дифференциала имеем

$$\Delta y = k\,\Delta x + \alpha\,\Delta x \text{ и } \Delta y = k_1\,\Delta x + \alpha_1\,\Delta x,$$

где α и α_1 — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$k \Delta x + \alpha \Delta x = k_1 \Delta x + \alpha_1 \Delta x$$

и, следовательно, при $\Delta x \neq 0$ имеем $k - k_1 = \alpha_1 - \alpha$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в последнем равенстве, получаем

$$k - k_1 = 0,$$

т. е. $k = k_1$. Таким образом, дифференциалы dy и $d_1 y$ совпадают. Теорема доказана.

Из определения дифференциала непосредственно следует: *дифференциал функции отличается от приращения этой функции на величину высшего порядка малости по сравнению с приращением независимой переменной.* Этим обстоятельством часто пользуются при приближенных вычислениях.

Пример 2. Пусть $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$. Найти Δy и dy при значении $x = 1$ и сравнить их между собой в трех случаях: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0{,}1$ и в) $\Delta x = 0{,}01$.

Имеем $\Delta y = [(x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 3] - (x^3 - x^2 + 2x + 3)$. Производя алгебраические выкладки, получим

$$\Delta y = (3x^2 - 2x + 2) \cdot \Delta x + (3x - 1) \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части последнего равенства, очевидно, является главной линейной частью приращения функции. Следовательно,

$$dy = (3x^2 - 2x + 2) \cdot \Delta x.$$

Полагая $x = 1$, получим следующую таблицу:

Δx	Δy	dy	$\frac{dy}{\Delta y}$ (в процентах)
1	6	3	50
0,1	0,321	0,3	93
0,01	0,030201	0,03	99

Отсюда ясно видно, что доля дифференциала dy в приращении Δy стремится к 100 %, если $\Delta x \to 0$.

§ 2. Связь дифференциала функции с производной. Дифференциал независимой переменной

Теорема 1. *Если функция имеет дифференциал, то эта функция имеет также и производную.*

Доказательство. В самом деле, пусть дана некоторая функция $y = f(x)$, и пусть

$$dy = k \Delta x$$

есть дифференциал этой функции. Согласно формуле (2) § 1, приращение Δy может быть записано в следующем виде:

$$\Delta y = k\,\Delta x + \alpha\,\Delta x,$$

где α — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \alpha$ и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

т. е. производная y' существует и равна величине k.

Следствие. *Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на приращение независимой переменной*, т. е.

$$dy = y'\,\Delta x. \qquad (1)$$

Теорема 2. *Если функция имеет производную, то эта функция имеет также и дифференциал.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ и, следовательно,

$$\Delta y = y'\,\Delta x + \alpha\,\Delta x. \qquad (2)$$

В сумме (2) первое слагаемое $y'\,\Delta x$, очевидно, представляет собой главную линейную часть приращения Δy, т. е. является дифференциалом функции y. Таким образом, функция имеет дифференциал

$$dy = y'\,\Delta x.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теперь понятно, почему функция от одной независимой переменной, имеющая производную, называется дифференцируемой.

До сих пор мы пользовались понятием дифференциала функции. Введем понятие *дифференциала независимой переменной.*

Определение. *Под дифференциалом независимой переменной понимается дифференциал функции, тождественной с независимой переменной*, т. е. функции $y = x$.

Так как

$$y' = 1 \text{ для } y = x, \qquad (3)$$

то согласно формуле (1) имеем

$$dx = \Delta x,$$

т. е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой независимой переменной*.

Пользуясь этим последним свойством, формулу (1) можно переписать в следующем симметричном виде:

$$dy = y'\,dx. \qquad (4)$$

Итак, *дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной*.

Разделив обе части последней формулы на dx, получим

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Иными словами: *производная функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу независимой переменной*.

До сих пор обозначение $\frac{dy}{dx}$ имело символический характер; сейчас это выражение мы можем рассматривать как обычную дробь с числителем dy и знаменателем dx.

§ 3. Геометрический смысл дифференциала

Выясним геометрический смысл дифференциала функции. Рассмотрим график функции $y = f(x)$.

Пусть $M(x, y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ — две точки данной кривой (рис. 127). В точке M проведем касательную MT к графику функции (здесь T — точка пересечения касательной с $M'N \parallel Oy$) и рассмотрим $\triangle MTN$ с катетами $MN = \Delta x$ и NT ($MN \parallel Ox$, $NT \parallel Oy$). Если через φ обозначить угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси Ox, то будем иметь

$$NT = \Delta x \operatorname{tg} \varphi.$$

Рис. 127

Но из геометрического смысла производной следует $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = y'$. Поэтому

$$NT = y'\,\Delta x = dy.$$

Таким образом, имеем теорему:

Дифференциал функции $y=f(x)$ в данной точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx.

Примечание. Заметим, что приращение функции $\Delta y = NM'$ (рис. 127), вообще говоря, не равно дифференциалу $dy = NT$ этой функции. В частности:

1) если график функции вогнут вверх, то

$$\Delta y > dy;$$

2) если же график функции вогнут вниз, то

$$\Delta y < dy.$$

§ 4. Физическое значение дифференциала

Пусть известен закон движения точки M по оси Ox:

$$x = f(t),$$

где x — расстояние точки M от начала отсчета O и t — время, причем будем предполагать, что точка M движется в одном и том же направлении. За бесконечно малый промежуток времени dt точка M переместится в точку M', пройдя при этом путь

$$\Delta x = f(t+dt) - f(t).$$

Это есть истинное приращение пути.

Дифференциал пути dx согласно формуле (4) из § 3 равен

$$dx = x'_t\, dt.$$

Но x'_t, представляющая собой производную пути по времени, есть скорость движения v в момент времени t; поэтому

$$dx = v\, dt.$$

Таким образом, *дифференциал пути равен тому фиктивному приращению пути, которое получится, если предположить, что, начиная с данного момента времени, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.*

Например, если спидометр автомобиля показывает 60 км/ч, то шофер, рассчитывая, что за 1 минуту пробег машины составит 1 километр, фактически вычисляет не приращение пути за 1 минуту (которое вследствие неравномерности движения может быть не равно 1 километру!), а дифференциал пути.

§ 5. Приближенное вычисление малых приращений функции

Если Δx мало по абсолютной величине, то для дифференцируемой функции $f(x)$ ее приращение

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

отличается от дифференциала

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x$$

на величину, бесконечно малую относительно Δx. Отсюда имеем приближенное равенство

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x, \tag{1}$$

или

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{1'}$$

Эти равенства весьма полезны при приближенных расчетах. Заметим, что формула (1′) представляет собой линейный член формулы Тейлора (гл. XI, § 6).

Пример 1. Найти $\sqrt[3]{1,1}$. Полагая в формуле (1′) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x=1$, $\Delta x=0,1$, будем иметь $\sqrt[3]{1,1}=\sqrt[3]{1}+ +0,1\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=1+0,1\cdot\frac{1}{3}=1,033$.

По таблицам же находим $\sqrt[3]{1,1}=1,032$.

Рассмотрим еще одну задачу, важную для приближенных вычислений.

Задача. Для данной функции

$$y = f(x)$$

предельная абсолютная погрешность ее аргумента x равна Δ_x, т. е.

$$|\Delta x| \leqslant \Delta_x.$$

Каковы предельные абсолютная Δ_y и относительная δ_y погрешности функции y?

Из формулы (1) имеем

$$|\Delta y| \approx |y'|\,|\Delta x|;$$

следовательно, при $y' \neq 0$, можно принять

$$\Delta_y = |y'|\,\Delta_x \tag{2}$$

и

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = |(\ln y)'| \Delta_x.$$

Пример 2. Угол $x=60°$ определен с точностью до $1°$. Как отразится это обстоятельство на синусе угла?

Здесь $\Delta_x = \operatorname{arc} 1° = \pi/180 \approx 1/57$. Поэтому ошибка для $y=\sin x$ на основании формулы (2), где $y' = \cos x$, может достигать величины $\Delta_y = \cos 60° \cdot \Delta_x \approx 1/114 \approx 0{,}01$.

§ 6. Эквивалентность приращения функции и дифференциала функции

Введем понятие *эквивалентных* или *асимптотически равных* бесконечно малых функций.

Определение. *Две бесконечно малые функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ называются эквивалентными или равносильными при $x \to a$, если предел их отношения равен единице, т. е. тогда, когда*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Для обозначения равносильности бесконечно малых α и β употребляется знак эквивалентности $\sim$, а именно, пишут $\alpha \sim \beta$.

Так, например,

$$\sin\alpha \sim \alpha$$

при $\alpha \to 0$, так как

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Заметим, что *если бесконечно малые α и β эквивалентны, то разность между ними есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.*

В самом деле, если $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$, то имеем

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0,$$

т. е. $\alpha - \beta$ имеет порядок выше, чем β (гл. VII, § 8). Аналогичное рассуждение можно провести также и для α.

Обратно, если *разность двух бесконечно малых α и β есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с одной из них, то эти бесконечно малые эквивалентны.*

Действительно, предполагая, например, что

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1\to 0,$$

получаем $\alpha/\beta\to 1$ и, следовательно,

$$\alpha\sim\beta.$$

В частности, *отбрасывая* (*или прибавляя*) *от бесконечно малой бесконечно малую высшего порядка, получаем величину, равносильную исходной.*

Например, при $x\to 0$ имеем $(x+1000x^2)\sim x$.

Отметим важное свойство эквивалентных бесконечно малых.

Теорема 1. *При нахождении предела отношения двух бесконечно малых данные бесконечно малые можно заменять эквивалентными им (предполагая, что предел отношения последних, конечный или бесконечный, существует).*

Доказательство. Действительно, пусть $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$. Имеем

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\equiv\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}. \qquad (1)$$

Переходя к пределу в тождестве (1), получим

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot 1=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример. Так как при $x\to 0$ $\sin x\sim x$ (гл. VII, § 11) и $2x+5x^2\sim 2x$ (поскольку $5x^2=o(2x)$ при $x\to 0$), то

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+5x^2}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Теорема 2. *Бесконечно малое приращение функции эквивалентно дифференциалу этой функции при всех значениях независимой переменной, для которых производная функции конечна и отлична от нуля.*

Доказательство. В самом деле, если функция $y=f(x)$ дифференцируема, то из формулы (2) из § 2 имеем

$$\Delta y=dy+\alpha\,\Delta x, \qquad (2)$$

где α — бесконечно мало при $\Delta x\to 0$.

Так как согласно условию теоремы при $\Delta x\neq 0$ имеем $dy=y'\,\Delta x\neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{dy}=1+\frac{\alpha}{y'}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

т. е. бесконечно малые Δy и dy эквивалентны при $\Delta x \to 0$.

Пример. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Имеем

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) = (1+x)^\alpha - 1$$

и

$$df(0) = f'(0)(x-0) = \alpha x.$$

Поэтому

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Замечание. Вообще, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$, то при $x \to 0$ имеем

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) \sim f'(0)\,x. \qquad (3)$$

Из формулы (3), в частности, при $x \to 0$, получаем

а) $\sin x \sim x$;

б) $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$;

в) $\ln(1+x) \sim x$.

§ 7. Свойства дифференциала

Рассмотрим теперь некоторые свойства дифференциала, аналогичные свойствам производной.

В дальнейших формулировках мы будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые функции имеют производные, т. е. являются дифференцируемыми.

I. Дифференциал постоянной. *Дифференциал постоянной равен нулю.*

Полагая в формуле (4) из § 2 $y = c$ и $y' = 0$, получим

$$dc = 0.$$

II. Дифференциал суммы. *Дифференциал алгебраической суммы нескольких дифференцируемых функций равен такой же алгебраической сумме дифференциалов этих функций.*

В самом деле, если u, v и w — дифференцируемые функции от независимой переменной x, то, например, имеем

$$(u+v-w)' = u' + v' - w'.$$

Умножая обе части на dx, получим

$$(u+v-w)'\,dx = u'\,dx + v'\,dx - w'\,dx.$$

Отсюда согласно формуле (4) из § 2 выводим

$$d(u+v-w)=du+dv-dw.$$

III. *Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то дифференциалы их равны между собой.*

Имеем

$$d(u+c)=du+dc.$$

Полагая здесь c постоянной и, следовательно, $dc=0$, получим

$$d(u+c)=du.$$

IV. *Постоянный множитель может быть вынесен за знак дифференциала.*

В самом деле, если c постоянно, то

$$(cu)'=cu'.$$

Умножив обе части этого равенства на dx, получим

$$(cu)'\,dx=c\,(u'\,dx),$$

или

$$d(cu)=c\,du.$$

V. Дифференциал произведения. *Дифференциал произведения двух сомножителей равен произведению первого сомножителя на дифференциал второго плюс произведение второго сомножителя на дифференциал первого.*

В самом деле, если u и v — дифференцируемые функции от x, то имеем

$$(uv)'=uv'+vu'.$$

Умножая обе части на dx, получим

$$(uv)'\,dx=u\,(v'\,dx)+v\,(u'\,dx),$$

или

$$d(uv)=u\,dv+v\,du.$$

VI. Дифференциал частного. *Дифференциал дроби (частного) равен также дроби, числитель которой есть произведение знаменателя дроби на дифференциал числителя минус произведение числителя на дифференциал знаменателя, а знаменатель есть квадрат знаменателя дроби.*

Мы имеем

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Умножив обе части на dx, получим

$$\left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v(u'\,dx) - u(v'\,dx)}{v^2}.$$

Отсюда

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

VII. Дифференциал сложной функции. *Дифференциал сложной функции (функции от функции) равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента* (обе функции дифференцируемы).

Пусть $y = f[\varphi(x)]$. Положим $\varphi(x) = u$ и, следовательно, $y = f(u)$. Если $f(u)$ и $\varphi(x)$ — дифференцируемые функции, то согласно теореме о производной функции от функции можно написать

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на дифференциал dx независимой переменной x, получим

$$y'_x\,dx = y'_u\,(y'_x\,dx). \qquad (1)$$

Но $y'_x\,dx = dy$ и $u'_x\,dx = du$; следовательно, равенство (1) можно переписать так:

$$du = y'_u\,du. \qquad (2)$$

Замечание. Формула (2) по внешнему виду совпадает с формулой (4) из § 2, но между ними есть принципиальное различие: в формуле (4) x есть независимая переменная, и следовательно, $dx = \Delta x$, тогда как в формуле (2) u есть функция от независимой переменной x, и поэтому, вообще говоря, $du \neq \Delta u$.

Из формулы (2) следует такая теорема.

VIII. Независимость вида дифференциала от выбора независимой переменной. *Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента, при этом безразлично, будет ли этот аргумент независимой переменной или дифференцируемой функцией от другой независимой переменной.*

На основании формул для производных (гл. X, § 12) получаем соответствующую таблицу для дифференциалов, где u — произвольная дифференцируемая функция.

Таблица дифференциалов функций

I. $du^n = nu^{n-1}\,du$.

II. $da^u = a^u \ln a\,du\ (a > 0)$,

$de^u = e^u\,du$.

III. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}$

$(a > 0,\ a \neq 1)$,

$d(\ln u) = \dfrac{du}{u}$.

IV. $d(\sin u) = \cos u\,du$.

V. $d(\cos u) = -\sin u\,du$.

VI. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$.

VII. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$.

VIII. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

IX. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

X. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}$.

XI. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}$.

XII. $df(u) = f'(u)\,du$.

§ 8. Дифференциалы высших порядков

Пусть x — независимая переменная и $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция. Согласно формуле (4) § 2 имеем

$$df(x) = f'(x)\,dx; \tag{1}$$

таким образом, дифференциал функции $f(x)$ есть функция от двух аргументов: x и dx.

В дальнейшем мы будем предполагать, что dx — дифференциал независимой переменной x — имеет произвольное, но фиксированное значение, не зависящее от независимой переменной x и одно и то же для всех рассматриваемых функций.

Если dx фиксированно, то $df(x)$ есть некоторая функция от x, пропорциональная производной $f'(x)$, с коэффициентом пропорциональности, равным dx. Может случиться, что эта функция также имеет дифференциал[1]); в таком случае последний называется *дифференциалом второго порядка* (или *вторым дифференциалом*) функции $f(x)$; а дифференциал, определяемый формулой (1), носит более точное название *дифференциала первого порядка* (или *первого дифференциала*).

Определение. *Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) $d^2f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции*, т. е

$$d^2f(x) = d[df(x)]. \tag{2}$$

[1]) Для этого достаточно, чтобы существовала вторая производная $f''(x)$.

Аналогично, *дифференциалом третьего порядка* (или *третьим дифференциалом*) $d^3f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала второго порядка этой функции, т. е.

$$d^3f(x) = d[d^2f(x)].$$

Так последовательно определяются *дифференциалы высших порядков.*

Выведем теперь формулу для дифференциала второго порядка функции $f(x)$ от независимой переменной x, предполагая, что эта функция дважды дифференцируема, т. е. имеет производную второго порядка. Так как

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

то вследствие формулы (2) имеем

$$d^2f(x) = d[f'(x)\,dx]. \qquad (3)$$

Если x — независимая переменная, то dx, равный Δx, очевидно, не зависит от x, т. е. dx по отношению к переменной x играет роль постоянной. Поэтому в формуле (3) множитель dx можно вынести за знак дифференциала, и мы получим

$$d^2f(x) = dx \cdot d[f'(x)].$$

Так как $f'(x)$ снова есть некоторая функция от x, то из формулы (1) следует

$$d[f'(x)] = [f'(x)]'\,dx = f''(x)\,dx.$$

Отсюда окончательно находим

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2, \text{ где } dx^2 = (dx)^2. \qquad (4)$$

Таким образом, получаем теорему.

Дифференциал второго порядка от данной функции равен произведению производной второго порядка этой функции на квадрат дифференциала независимой переменной.

Заметим, что формула (4), вообще говоря, неверна, если x не является независимой переменной, так как здесь dx нельзя рассматривать как множитель, не зависящий от x (см. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. 1).

Если положить $f(x) = y$, то формулу (4) можно переписать так: $d^2y = y''\,dx^2$; отсюда имеем

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

т. е. *производная второго порядка от данной функции равна отношению дифференциала второго порядка этой функции к квадрату дифференциала независимой переменной.*

Если x есть независимая переменная, то аналогично формуле (4) имеем

$$d^3 f(x) = f'''(x)\,dx^3, \quad d^4 f(x) = f^{IV}(x)\,dx^4$$

и т. д.

Положим теперь в формулах (4) и (5)

$$f(x) \equiv x.$$

Тогда $f'(x) = 1$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, ... Следовательно,

$$d^2x = 0, \ d^3x = 0, \ \ldots$$

Получаем теорему.

Дифференциалы высших порядков от независимой переменной равны нулю.

Упражнения

Найти дифференциал dy функции, если:

1. $y = 3x^2$. 2. $y = x \sin x + \cos x$. 3. $y = \frac{x}{1-x^2}$. 4. $y = \sqrt{1-x^2}$.

5. $y = \ln x$. 6. $y = x^2$, где $x = 2 - t + t^2$.

7. Пусть $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 6$. Найти Δy и dy и сравнить их между собой, если: а) $x = 1$, $\Delta x = 1$; б) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

8. Ребро куба $x = 10$ м. На сколько увеличится объем этого куба, если ребро его получит приращение $\Delta x = 0{,}1$ м? Дать точное и приближенное решения.

9. Заменяя приращения функции дифференциалом, приближенно найти:

а) $\sqrt[3]{0{,}95}$; б) $\cos 60°20'$; в) $\operatorname{arctg} 1{,}02$.

10. Какова предельная абсолютная погрешность функции $y = \operatorname{tg} x$, если $x = 60° \pm 1°$?

11. Найти dy и d^2y, если $y = e^{-x^2}$.

ГЛАВА XIII

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу, а следовательно, и производной неизвестной функции $F(x)$, требуется определить эту функцию. Иными словами, имея выражение

$$dF(x) = f(x)\,dx \qquad (1)$$

или соответственно

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

где $f(x)$ — известная функция, нужно найти функцию $F(x)$. Для простоты мы будем предполагать, что равенство (1) выполнено на некотором конечном или бесконечном промежутке.

Искомая функция $F(x)$ называется при этом первообразной функцией по отношению к функции $f(x)$. Таким образом, мы можем дать следующее определение первообразной функции.

Определение. *Первообразной функцией для данной функции $f(x)$ на данном промежутке называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ или дифференциал которой равен $f(x)\,dx$ на рассматриваемом промежутке.*

Например, одной из первообразных функций для функции $3x^2$ будет x^3, ибо $(x^3)' = 3x^2$. Первообразная функция не единственна, так как $(x^3+1)' = 3x^2$, $(x^3-5)' = 3x^2$ и т. п., и поэтому функции x^3+1, x^3-5 и т. п. также являются первообразными для функции $3x^2$. Следовательно, данная функция имеет бесчисленное множество первообразных.

В нашем примере каждые две первообразные отличались друг от друга на некоторое постоянное слагаемое. Покажем, что это будет иметь место и в общем случае.

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции, определенной в некотором промежутке, отличаются друг от друга в этом промежутке на постоянное слагаемое.*

Доказательство. В самом деле, пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$, и $F_1(x)$, $F_2(x)$ — ее первообразные, т. е.

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x).$$

Отсюда

$$F_1'(x) = F_2'(x).$$

Но если две функции имеют одинаковые производные, то эти функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое (гл. XI, § I, следствие 2 к теореме о конечном приращении функции). Следовательно,

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

где C — постоянная величина, что и требовалось доказать.

Геометрическая иллюстрация. Если

$$y = F_1(x) \quad \text{и} \quad Y = F_2(x)$$

— первообразные одной и той же функции $f(x)$, то касательные к их графикам в точках с общей абсциссой x параллельны между собой: $\operatorname{tg}\alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ (рис. 128). В таком случае расстояние между этими кривыми, считая вдоль оси Oy, остается постоянным:

$$F_2(x) - F_1(x) = C,$$

т. е. эти кривые в некотором смысле «параллельны» друг другу.

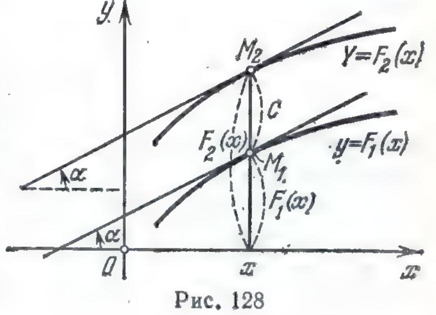


Рис. 128

Следствие. *Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ для данной функции $f(x)$, определенной на промежутке $\langle a, b\rangle$, всевозможные постоянные C, мы получим все первообразные для функции $f(x)$.*

В самом деле, с одной стороны, если $F(x)$ есть первообразная функция для $f(x)$, т. е. если $F'(x) = f(x)$, то

функция $F(x)+C$, где C — любая постоянная, в силу того, что производная постоянной равна нулю, также будет первообразной функции $f(x)$, так как

$$[F(x)+C]' = F'(x)+C' = f(x).$$

С другой стороны, мы доказали, что каждая первообразная функции $f(x)$ может быть получена из функции $F(x)$ путем прибавления к ней надлежащим образом подобранного постоянного слагаемого C.

Следовательно, формула

$$F(x)+C, \tag{2}$$

где $-\infty < C < +\infty$, а $F(x)$ — какая-либо первообразная для функции $f(x)$, исчерпывает всю совокупность первообразных для данной функции $f(x)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, если явно не оговорено противное, что рассматриваемая функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном промежутке $\langle a, b\rangle$.

Введем теперь основное понятие интегрального исчисления — понятие неопределенного интеграла.

Определение. *Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется* ***неопределенным интегралом*** *от функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)\,dx$ и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*.

Вспоминая определение первообразной, можно сказать, что неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ на данном промежутке является **функцией общего вида**, дифференциал которой равен подынтегральному выражению $f(x)\,dx$, а следовательно, производная которой по переменной x равна подынтегральной функции $f(x)$ во всех точках рассматриваемого промежутка.

Пусть $F(x)$ — некоторая вполне определенная первообразная для функции $f(x)$. Как мы видели, всякая другая первообразная этой функции имеет вид $F(x)+C$, где C — некоторая постоянная. Согласно определению неопреде-

ленного интеграла можно написать

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (3)$$

где $F'(x) = f(x)$ и постоянная C может принимать любое значение, и поэтому называется *произвольной постоянной*.

Пример. Как мы видели, для функции $3x^2$ одной из первообразных является функция x^3. Поэтому

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Геометрически неопределенный интеграл

$$y = F(x) + C$$

представляет собой семейство «параллельных» кривых (рис. 129).

Рис. 129

Из определения неопределенного интеграла вытекает, что если мы имеем *дифференциальное уравнение* (т. е. уравнение, содержащее дифференциалы) (подробнее см. гл. XIX) вида

$$dy = f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то общее решение этого уравнения при $a < x < b$ дается формулой

$$y = \int f(x)\,dx.$$

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

Опираясь на формулу (3) предыдущего параграфа, выведем основные свойства неопределенного интеграла.

I. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.*

Это свойство непосредственно вытекает из определения неопределенного интеграла.

Таким образом, имеем

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \qquad (1)$$

и

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$$

II. *Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.*

В самом деле, пусть

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)\,dx,$$

где функция $\varphi'(x)$ непрерывна. Функция $\varphi(x)$, очевидно, является первообразной для $\varphi'(x)$. Поэтому имеем

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \qquad (2)$$

Замечание. В формулах (1) и (2) знаки d и $\int$, следующие друг за другом в том или другом порядке, взаимно уничтожают друг друга (если не учитывать постоянного слагаемого). В этом смысле *дифференцирование и интегрирование и являются взаимно обратными математическими операциями.*

III. *Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*, т. е. если постоянная $A \neq 0$, то

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx. \qquad (3)$$

В самом деле, пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. В силу основной формулы (3) из § 1 имеем

$$A\int f(x)\,dx = A[F(x) + C] = AF(x) + C_1, \qquad (4)$$

где $C_1 = AC$, причем C и C_1 — произвольные постоянные при $A \neq 0$. Но $AF(x)$ есть первообразная для функции $Af(x)$, так как

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Поэтому из формулы (4) получаем требуемую формулу (3).

Замечание. При $A = 0$ формула (3) неверна, так как левая часть ее представляет собой произвольную постоянную, а правая часть тождественно равна нулю.

IV. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций*, т. е. если, например, функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны в интервале (a, b), то

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx \qquad (5)$$

при $x \in (a, b)$.

Действительно, пусть $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, $H'(x)=h(x)$ при $x\in(a, b)$. На основании формулы (3) из § 1 имеем

$$\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx=$$
$$=[F(x)+C_1]+[G(x)+C_2]-[H(x)+C_3]=$$
$$=[F(x)+G(x)-H(x)]+C, \qquad (6)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные и $C=C_1+C_2-C_3$, очевидно, также является произвольной постоянной. Но функция $F(x)+G(x)-H(x)$ есть первообразная для функции $f(x)+g(x)-h(x)$, так как

$$[F(x)+G(x)-H(x)]'=F'(x)+G'(x)-H'(x)=$$
$$=f(x)+g(x)-h(x).$$

Следовательно,

$$\int [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx=F(x)+G(x)-H(x)+C. \qquad (7)$$

Из формул (6) и (7) вытекает равенство (5).

§ 3. Таблица простейших неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть операция, обратная дифференцированию, нетрудно получить таблицу простейших интегралов. Для этого будем исходить из формулы (3) из § 1, которую перефразируем теперь таким образом: если

$$dF(x)=f(x)\,dx,$$

то

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Обращая формулы дифференцирования, получим

I. Так как $d\left(\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\right)=x^m dx$, то $\displaystyle\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$ $(m\neq -1)$.

II. » » $d(\ln|x|)=\dfrac{dx}{x}$, » $\displaystyle\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

(при $x<0$ и при $x>0$).

III. » » $d(e^x)=e^x dx$, » $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$.

IV. » » $d\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)=a^x\,dx$, » $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

$(a>0,\ a\neq 1)$.

V. Так как $d(\sin x)=\cos x\,dx$, то $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

VI. » » $d(-\cos x)=\sin x\,dx$, » $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

VII. » » $d(\operatorname{tg} x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$, » $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$.

VIII. » » $d(-\operatorname{ctg} x)=\frac{dx}{\sin^2 x}$ » $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$.

IX. » » $d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(-\arccos x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, » $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1$.

X. » » $d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$, $d(-\operatorname{arcctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$, » $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C=-\operatorname{arcctg} x+C_1$.

Для полноты таблицы присоединим сюда еще две формулы, справедливость которых можно проверить непосредственно дифференцированием:

XI. $\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; $\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C$, где постоянная $\alpha \neq 0$ (см. § 7).

Так как (см. гл. X, § 9) $d(\operatorname{ch} x)=\operatorname{sh} x\,dx$ и $d(\operatorname{sh} x)=\operatorname{ch} x\,dx$, то имеем еще две полезные формулы:

XIII. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C$. XIV. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C$.

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, мы будем называть *табличными*, и их необходимо твердо запомнить.

Пример 1. $\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C$.

Пример 2. $\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

§ 4. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента

В таблице основных интегралов предполагалось, что x есть независимая переменная. Однако эта таблица полностью сохраняет свое значение, если под x понимать любую непрерывно дифференцируемую функцию от независимой переменной.

В самом деле, пусть x есть независимая переменная, $f(x)$ — некоторая непрерывная функция на данном промежутке и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x)=f(x)$. Имеем

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C. \tag{1}$$

Положим теперь

$$u=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция[1]), и рассмотрим интеграл

$$\int f(u)\,du = \int f(u)\,u'\,dx. \tag{2}$$

В таком случае *сложная функция*

$$F(u)=F(\varphi(x)) \tag{3}$$

является первообразной для подынтегральной функции интеграла (2). Действительно, в силу независимости дифференциала первого порядка от выбора независимой переменной получаем

$$dF(u)=F'(u)\,du=f(u)\,du \tag{4}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dx}[F(u)]=\frac{dF(u)}{du}\,\frac{du}{dx}=f(u)\,u'. \tag{4'}$$

Поэтому

$$\int f(u)\,du=F(u)+C, \tag{5}$$

где $F'(u)=f(u)$.

Таким образом, из справедливости формулы (1) следует справедливость формулы (5); при этом последняя формула получается из предыдущей путем формальной замены x на u. На основании этого свойства получаем *обобщенную таблицу простейших интегралов:*

$$\int u^m\,du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C\ (m\neq-1),\quad \int\frac{du}{u}=\ln|u|+C \text{ и т. д.},$$

где u — любая непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной. Эта таблица является обращением обобщенных формул дифференцирования (гл. XII, § 7).

Выбирая различным образом функцию u, мы можем существенно расширить таблицу простейших интегралов.

---

[1]) То есть предполагается, что производная $\varphi'(x)$ непрерывна.

Пример. Из формулы 1 следует

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C. \qquad (6)$$

Заменяя здесь x на $\sin x$, получим

$$\int \sin x\, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \text{ т. е. } \int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Далее, подставляя, например, в формулу (6) вместо x функцию $\ln x$, будем иметь

$$\int \ln x\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \quad \text{или} \quad \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

и т. п.

Отсюда становится понятной важность умения приводить данное дифференциальное выражение $f(x)\,dx$ к виду

$$f(x)\,dx = g(u)\,du,$$

где u есть некоторая функция от x и g — функция более простая для интегрирования, чем f.

Отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для дальнейшего:

1) $dx = d(x+b)$, где b — постоянная величина;

2) $dx = \frac{1}{a}\, d(ax)$, где константа $a \neq 0$;

3) $dx = \frac{1}{a}\, d(ax+b)$ $(a \neq 0)$;

4) $x\,dx = \frac{1}{2}\, d(x^2)$;

5) $\sin x\,dx = -d(\cos x)$;

6) $\cos x\,dx = d(\sin x)$.

Вообще,

$$\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x).$$

Пользуясь этими преобразованиями дифференциалов, найдем некоторые неопределенные интегралы.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \qquad (a \neq 0).$$

Пример 2.

$$\int \sqrt{x-2}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}}\, d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

П р и м е р 3.

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d\,(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

П р и м е р 4.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

П р и м е р 5.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

П р и м е р 6.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

П р и м е р 7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

П р и м е р 8.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mp\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \mp\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= \mp\arcsin\frac{1}{x} + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C, \text{ где } |x| > 1.$$

П р и м е р 9.

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d\,(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

§ 5. Понятие об основных методах интегрирования

Для вычисления данного интеграла мы должны, если это возможно, пользуясь теми или другими способами, привести его к табличному интегралу и таким образом найти искомый результат. В нашем курсе мы рассмотрим лишь некоторые, наиболее часто встречающиеся приемы интегрирования и укажем их применение к простейшим примерам.

Наиболее важными методами интегрирования являются: 1) *метод разложения*, 2) *метод подстановки* и 3) *метод интегрирования по частям*.

1. Метод разложения. Пусть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$; тогда на основании свойства IV § 2 имеем

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx.$$

По возможности слагаемые $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стараются подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно.

Пример 1.

$$\int (1-\sqrt{x})^2\,dx=\int (1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\int dx-\int 2\sqrt{x}\,dx+\int x\,dx=$$

$$=\int dx-2\int x^{1/2}\,dx+\int x\,dx=$$

$$=x-2\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C=x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Примечание. Нет надобности после каждого слагаемого ставить произвольную постоянную, потому что сумма произвольных постоянных есть также произвольная постоянная, которую мы пишем в конце.

Пример 2.

$$\int \frac{x^4-6x^3-8x^2+9x-5}{x^2}\,dx=\int \left(x^2-6x-8+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx=$$

$$=\int x^2\,dx-6\int x\,dx-8\int dx+9\int \frac{dx}{x}-5\int x^{-2}\,dx=\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}-$$

$$-8x+9\ln|x|-5\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^3}{3}-3x^2-8x+9\ln|x|+\frac{5}{x}+C.$$

Пример 3.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

Пример 4. $\int \sin^2 x\,dx.$

Так как $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, то

$$\int \sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x)=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Пример 5. $\int \sin x\cos 3x\,dx.$

Так как $\sin x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x)$, то имеем

$$\int \sin x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int (\sin 4x-\sin 2x)\,dx=\frac{1}{8}\int \sin 4x\,d(4x)-$$

$$-\frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x)=-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

2. **Метод подстановки** (**метод введения новой переменной**).

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (α, β); причем функция φ отображает интервал (α, β) в интервал (a, b).

На основании свойства независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента (§ 4), и учитывая, что $dx=\varphi'(t)\,dt$, получаем *формулу замены переменной в неопределенном интеграле*

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (1), может оказаться проще интеграла, стоящего в левой части этого равенства, или даже табличным.

Рассмотрим примеры.

Пример 6. $\int x\sqrt{x-5}\,dx$.

Чтобы избавиться от корня, полагаем $\sqrt{x-5}=t$. Отсюда $x=t^2+5$ и, следовательно, $dx=2t\,dt$.

Производя подстановку, последовательно имеем

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx=$$
$$=\int (t^2+5)\,t\cdot 2t\,dt=\int (2t^4+10t^2)\,dt=2\int t^4\,pt+10\int t^2\,dt=$$
$$=2\cdot\frac{t^5}{5}+10\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}(x-5)^{5/2}+\frac{10}{3}(x-5)^{3/2}+C.$$

Пример 7. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

Здесь полезно применить тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$, отсюда $dx=a\cos t\,dt$. Следовательно,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{4}\int\cos 2t\,d(2t)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Возвращаясь обратно к переменной x, будем иметь

$$\sin t=\frac{x}{a}\quad\text{и}\quad t=\arcsin\frac{x}{a}.$$

Далее,

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Поэтому окончательно получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \tag{2}$$

Иногда формулу (1) полезно применять справа налево:

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x), \qquad (3)$$

или

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,$$

где

$$t = \varphi(x).$$

На практике желательно не вводить новой переменной t, а ограничиться использованием формулы (1). Простейшие примеры этого типа были разобраны в § 4. Здесь мы дополнительно рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 8. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx.$

Полагая $t = 1+\operatorname{ctg} x$, $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, будем иметь

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx = -\int (1+\operatorname{ctg} x)^{1/3}\,d(1+\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\int t^{1/3}\,dt = -\frac{3}{4}\,t^{4/3} + C = -\frac{3}{4}\,(1+\operatorname{ctg} x)^{4/3} + C.$$

Пример 9. $\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}.$

Так как $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то имеем

$$\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x} = \int \ln x\,d(\ln x) + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln|\ln x| + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

(см. формулу XI в § 3).

3. Метод интегрирования по частям. Пусть u и v — непрерывно дифференцируемые функции от x. На основании формулы дифференциала произведения (гл. XII, § 7, V) имеем

$$d(uv) = u\,dv + v\,du;$$

отсюда

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируя, получим

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du,$$

или окончательно

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (4)$$

Это и есть *формула интегрирования по частям.*

Выведенная формула показывает, что интеграл $\int u\,dv$ приводится к интегралу $\int v\,du$, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 11. $\int \ln x\,dx$.

Полагая здесь $u=\ln x$ и $dv=dx$, получим $du=d\ln x=\frac{dx}{x}$ и $v=x$.

Следовательно, в силу формулы (4) будем иметь

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

Пример 12. $\int x\cos x\,dx$.

Полагая $u=x$ и $dv=\cos x\,dx$, имеем $du=dx$ и $v=\int \cos x\,dx = \sin x$. Пользуясь формулой интегрирования по частям (4), получим

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

На практике важно научиться применять формулу (4), не выписывая в стороне выражения для функций u и v.

Пример 13.

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}\,x\,d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x - \int (x^2+1)\,d\,\mathrm{arctg}\,x\right] =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int (x^2+1)\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + C.$$

§ 6. Интегрирование рациональных дробей с квадратичным знаменателем

Речь идет о вычислении интегралов вида

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

где $P(x)$ — целый многочлен и a, b, c — постоянные, $a \neq 0$. Разделив числитель $P(x)$ на знаменатель ax^2+bx+c, получаем в частном некоторый многочлен $Q(x)$ и в остатке —

линейный двучлен $mx+n$ (так как степень остатка ниже степени делителя); отсюда

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}=Q(x)+\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}.$$

Интеграл от многочлена $Q(x)$ находится непосредственно; поэтому мы покажем, как вычисляются интегралы вида

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx. \qquad (1)$$

Выведем сначала два основных интеграла.

I. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0),$

т. е.

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0). \qquad (2)$$

II. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2} \quad (a\neq 0).$

Имеем

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Отсюда

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Итак (ср. XI из § 3),

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq 0). \qquad (3)$$

Результаты (2) и (3) следует запомнить.

К интегралам I и II присоединим еще интеграл

III. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2\pm a^2)}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+C.$

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{2x^2+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$

Основной прием вычисления интеграла (1) состоит в следующем: квадратный трехчлен ax^2+bx+c дополняют до полного квадрата[1]). После этого, если коэффициент $m=0$, то интеграл (1) сводится или к интегралу I, или к интегралу II. Если же $m \neq 0$, то интеграл (1) сводится к интегралам I и III, или к интегралам II и III. Как это делается, покажем на примерах.

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+16} = \int \frac{dx}{(x^2-2\cdot 5x+25)+(16-25)} =$$
$$= \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+\left(4-\frac{9}{4}\right)} =$$
$$= \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

Пример 5. $I = \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$

Полагаем $x+\frac{1}{2}=t$; отсюда $x=t-\frac{1}{2}$ и $dx=dt$.

Следовательно,

$$I = \int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} -$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

---

[1]) Мы предполагаем, что квадратный трехчлен не является точным квадратом.

Пример 6. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

Произведя деление x^4 на x^2+1, имеем $\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$. Отсюда

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\int x^2\,dx-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C.$$

Замечание. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные и различные корни x_1 и x_2, то, как доказывается в подробных курсах анализа, для вычисления интеграла (1) можно воспользоваться разложением подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\equiv\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}, \tag{4}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Числа A и B находятся путем приведения тождества (4) к целому виду и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства.

Пример 7. Найти $I=\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}\,dx$.

Приравнивая знаменатель нулю, получаем уравнение $x^2+5x-6=0$; находим его корни; $x_1=1$ и $x_2=-6$. Согласно формуле (4)

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}. \tag{5}$$

Отсюда, освобождаясь от знаменателя и учитывая, что $x^2+5x-6=(x-1)(x-6)$, получим

$$x+2\equiv A(x+6)+B(x-1), \tag{6}$$

или

$$x+2\equiv(A+B)x+(6A-B).$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях последнего равенства, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}A+B&=1,\\ 6A-B&=2.\end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $A=3/7$, $B=4/7$.

Заметим, что коэффициенты A и B можно просто определить из тождества (6), полагая в нем сначала $x=1$, откуда $3=A\cdot 7$ и $A=3/7$, а затем полагая $x=-6$, что дает $-4=B(-7)$ и $B=4/7$.

На основании разложения (5) получаем

$$I=\frac{3}{7}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{d(x+6)}{x+6}=$$
$$=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C=\frac{1}{7}\ln\{|x-1|^3(x+6)^4\}+C.$$

§ 7. Интегрирование простейших иррациональностей

1. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$, то полезна подстановка

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Пример 1. Найти $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Полагаем $t = \sqrt[3]{x+1}$; отсюда $x = t^3 - 1$ и $dx = 3t^2\,dt$. Имеем

$$I = \int \frac{(t^3-1)\cdot 3t^2\,dt}{t} = 3\int (t^4 - t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^2 + C = \frac{3}{5}(x+1)^{5/3} - \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} + C.$$

2. Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

с помощью дополнения квадратного трехчлена ax^2+bx+c до полного квадрата сводится к одному из двух интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha \pm x^2}},$$

вычисление которых дано ниже.

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$ $\quad (\alpha \neq 0)$.

Применим здесь *подстановку Эйлера*:

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x,$$

где t — новая переменная. Возводя это равенство почленно в квадрат, будем иметь $x^2 + \alpha = t^2 - 2tx + x^2$, или

$$\alpha = t^2 - 2tx.$$

Беря дифференциалы от обеих частей последнего равенства, получим $0 = 2t\,dt - 2x\,dt - 2t\,dx$, или

$$t\,dx = (t-x)\,dt.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{dt}{t}.$$

Таким образом, имеем

$$\int \frac{dt}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Наконец, заменяя t его выражением через x, окончательно находим табличный интеграл XII (§ 3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \quad (\alpha \neq 0). \qquad (1)$$

Эту формулу необходимо запомнить.

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Используя формулу (1), имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}.$$

Полагая здесь $x-3=t$, последовательно получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right) + C.$$

Так как $t=x-3$, то окончательно будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \ln\left[x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\,\right] + C =$$

$$= \ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right) + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (a > 0).$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

§ 8. Интегрирование тригонометрических функций

В приложениях важное значение имеют интегралы

$$I = \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

где m и n — целые неотрицательные числа.

Здесь различают два случая:

1) хотя бы один из показателей m или n есть число нечетное;

2) оба показателя m и n есть числа четные.

В первом случае интеграл I берется непосредственно.

Пример 1. Найти $I=\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Последовательно полагаем

$$I=\int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x\, dx) = -\int (1-\cos^2 x) \cos^2 x\, d(\cos x) =$$
$$= -\int \cos^2 x\, d(\cos x) + \int \cos^4 x\, d(\cos x) =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Во втором случае для вычисления интеграла I используют формулы двойного аргумента:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 2. Найти $I=\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

Имеем

$$I=\int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1+\cos 2x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) =$$
$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} =$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

В теории рядов Фурье (гл. XXI, § 17) важное значение имеют интегралы

$$\int \sin mx \sin nx\, dx, \quad \int \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx \cos nx\, dx.$$

Они вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Пример.

$$\int \sin x \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x)\,dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

§ 9. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

Интеграл

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, берется многократным интегрированием по частям.

Пример.

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 d(e^{2x}) = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int x d(e^{2x}) = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Аналогичным приемом вычисляются интегралы вида

$$\int P(x)\sin ax\,dx \quad \text{и} \quad \int P(x)\cos ax\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен.

§ 10. Теорема Коши. Понятие о «неберущихся» интегралах

До сих пор мы весьма удачно для некоторых непрерывных функций $f(x)$ находили их неопределенные интегралы

$$\int f(x)\,dx.$$

Возникает вопрос, всегда ли это будет так, т. е.: 1) всякая ли непрерывная функция $f(x)$ имеет неопределенный интеграл и 2) каким способом можно найти этот интеграл, если он существует.

Ответом на первую часть этого вопроса служит теорема Коши, являющаяся основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема Коши. *Всякая непрерывная функция имеет первообразную.*

Иными словами, *для каждой непрерывной в интервале* (a, b) *функции* $f(x)$ *существует функция* $F(x)$, *производная которой в интервале* (a, b) *в точности равна данной функции* $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Тем самым существует и неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Доказательство этой теоремы ввиду его сложности не может быть здесь приведено[1]).

Этим не решается вторая часть нашего вопроса: если дана непрерывная функция $f(x)$, то как найти ее неопределенный интеграл. Теорема Коши вовсе не утверждает, что первообразную данной функции можно фактически отыскать с помощью конечного числа известных операций и выразить ответ в элементарных функциях (алгебраических, показательных, тригонометрических и т. п.). Более того, имеются непрерывные элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие интегралы часто называют «неберущимися», подразумевая под этим, что такого рода интегралы не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций.

Например, можно доказать, что интегралы

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

и ряд других не сводятся к конечной комбинации элементарных функций и, следовательно, являются «неберущимися» в нашем смысле слова.

Упражнения

Пользуясь таблицей простейших интегралов, найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int (x^2 - 3x + 1)\,dx$. 2. $\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx$. 3. $\int \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{x^2 \sqrt[3]{x}}\,dx$.

4. $\int (a^x + b^x)^2\,dx$. 5. $\int (\sin 3x + \cos 5x)\,dx$.

---

[1]) См. Грэнвиль В. Э. и Лузин Н. Н. Курс дифференциального и интегрального исчислений, ч. II — М.: ОНТИ, 1937, с. 266—278.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Указание. Применить тождество: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+2}$. 8. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. 11. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. 12. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

13. $\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$.

Применяя метод разложения, найти интегралы:

14. $\int \frac{x^2}{1-x}\,dx$. 15. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$. 16. $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$.

17. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$. 18. $\int \frac{dx}{4-x^2}$. 19. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

20. $\int \cos^2 5x\,dx$.

21. $\int \sin x \cos 7x\,dx$. 22. $\int \cos 3x \cos 5x\,dx$.

Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

23. $\int x\sqrt{x-1}\,dx \quad (\sqrt{x-1}=t)$. 24. $\frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (\sqrt{x}=t)$.

25. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \quad (x=\sin t)$. 26. $\int \frac{dx}{1+2e^x} \quad (e^x=t)$.

Методом интегрирования по частям найти интегралы:

27. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. 28. $\int x \ln x\,dx$. 29. $\int x \sin x\,dx$.

30. $\int xe^x\,dx$. 31. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. 32. $\int x^2 e^x\,dx$.

Найти интегралы от рациональных дробей:

33. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$. 34. $\int \frac{dx}{5x^2-2}$. 35. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

36. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$. 37. $\int \frac{dx}{x^2-3x+1}$. 38. $\int \frac{dx}{x^2+8x-9}$.

39. $\int \frac{3x+5}{x^2+8x+15}\,dx$. 40. $\int \frac{x^2}{x^2+4x+5}\,dx$.

Найти интегралы от иррациональных функций:

41. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$. 42. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$. 43. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$. 45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$. 46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

Найти интегралы от тригонометрических функций:

48. $\int \sin x \cos^3 x\, dx$. 49. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$. 50. $\int \sin^3 x\, dx$.

51. $\int \cos^4 x\, dx$. 52. $\int \sin x \sin (x+\alpha)\, dx$.

53. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Указание. Использовать формулу $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.

Найти интегралы от трансцендентных функций:

54. $\int x^2 e^{-x}\, dx$. 55. $\int (x^2+2x+3)\, e^x\, dx$. 56. $\int (x-1) \sin 2x\, dx$.

57. $\int e^{-2x} \cos 3x\, dx$. 58. $\int x \operatorname{arcctg} x\, dx$. 59. $\int \ln^2 x\, dx$.

60. $\int \arcsin x\, dx$.

ГЛАВА XIV

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Понятие об определенном интеграле

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на данном отрезке $[a, b]$, где $a < b$ или $a > b$, и $F(x)$ — некоторая ее первообразная (см. гл. XIII, § 1), т. е. $F'(x) = f(x)$ при $x \in [a, b]$.

Определение. *Под определенным интегралом*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

от данной непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ понимается соответствующее приращение ее первообразной, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

(*формула Ньютона—Лейбница*).

Кроме того, считаем для любой функции $f(x)$, имеющей смысл в точке a,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(a — любое). Таким образом, формула (2) справедлива также при $a = b$.

В выражении (1) числа a и b называются *пределами интегрирования*, соответственно — *нижним* и *верхним*, $[a, b]$ — *промежутком интегрирования*, а $f(x)$ — подынтегральной функцией. Формулу (2) можно выразить в виде правила: *определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования*. Введя обозначение для

разности

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта носит название *вставки*, формулу (2) можно записать еще так:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b, \qquad (3)$$

причем следует помнить, что при расшифровке вставки сначала подставляется верхний предел интегрирования, а затем нижний.

Пример. Найти интеграл от x^2 в пределах от 2 до 4.

Так как $\frac{1}{3}x^3$ есть первообразная для x^2, то согласно формуле (3) имеем

$$\int_2^4 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=18\frac{2}{3}.$$

Заметим, что тот же результат мы получили бы, если бы использовали другую первообразную для x^2, например, $\frac{x^3}{3}+1$, или $\frac{x^3}{3}-2$, и т. д. Это явление носит общий характер.

Теорема. *Определенный интеграл от непрерывной функции не зависит от выбора первообразной для подынтегральной функции.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ и $F_1(x)$ — две различные первообразные непрерывной на отрезке $[a, b]$ подынтегральной функции $f(x)$ интеграла (1). В силу основной теоремы для неопределенного интеграла (гл. XIII, § 1) имеем

$$F_1(x)=F(x)+C,$$

где C — некоторая постоянная величина. Отсюда

$$F_1(x)\Big|_a^b=F_1(b)-F_1(a)=[F(b)+C]-[F(a)+C]=$$

$$=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b=\int_a^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int f(x)\,dx\Big|_a^b, \qquad (4)$$

где под $\int f(x)\,dx$ *понимается одна из первообразных для функции* $f(x)$.

Формула (4) устанавливает связь между определенным и соответствующим неопределенным интегралами. Отметим формальную разницу между ними: определенный интеграл представляет собой ч и с л о, а неопределенный—ф у н к ц и ю.

Согласно теореме Коши (см. гл. XIII, § 10) всякая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную. Отсюда вытекает теорема.

Т е о р е м а. *Для всякой функции, непрерывной на отрезке* $[a, b]$ *существует соответствующий определенный интеграл.*

З а м е ч а н и е. Пусть $y' = f(x)$, т. е.

$$dy = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Интегрируя равенство (5) в пределах от a до b, будем иметь

$$y(b) - y(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Последняя формула часто применяется на практике.

Учение о неопределенном и определенном интегралах и их приложениях составляет предмет *интегрального исчисления.*

§ 2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $t \in [a, x] \subset [a, b]$ (во избежание путаницы, переменная интегрирования обозначена другой буквой).

Если $F(x)$—первообразная функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x),$$

то согласно формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a). \tag{2}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}[F(x)-F(a)]=F'(x)-[F(a)]'=f(x)-0=f(x).$$

Следовательно, *производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x). \qquad (3)$$

Таким образом, интеграл

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (4)$$

является первообразной для подынтегральной функции $f(x)$. Отметим, что из формулы (2) следует, что $\Phi(a)=0$, т. е. $\Phi(x)$ есть та первообразная для функции $f(x)$, которая обращается в нуль при $x=a$.

Пример. Имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt=\sqrt{1+x^2}.$$

Рассмотрим теперь определенный интеграл с переменным нижним пределом

$$\int_x^b f(t)\,dt,$$

где $x\in[a,\ b]$.

На основании формулы Ньютона—Лейбница имеем

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^b f(x)\,dx\right]=\frac{d}{dx}[F(b)-F(x)]=[F(b)]'-F'(x)=-f(x).$$

Таким образом, *производная определенного интеграла с переменным нижним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела, взятому с обратным знаком.*

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то на основании связи неопределенного ин-

теграла с первообразной (гл. XIII, § 1) будем иметь

$$\int f(x)\,dx = C + \int_a^x f(t)\,dt$$

при $a \leqslant x \leqslant b$, где C — произвольная постоянная.

§ 3. Геометрический смысл определенного интеграла

Рассмотрим площадь $S(x)$[1]) переменной криволинейной трапеции (рис. 130), ограниченной сверху непрерывной кривой $Y = f(X)$ ($a \leqslant X \leqslant b$, $f(X) \geqslant 0$), снизу осью OX ($Y = 0$), слева неподвижной вертикалью $X = a$, а справа подвижной вертикалью $X = x$ ($a \leqslant x \leqslant b$).

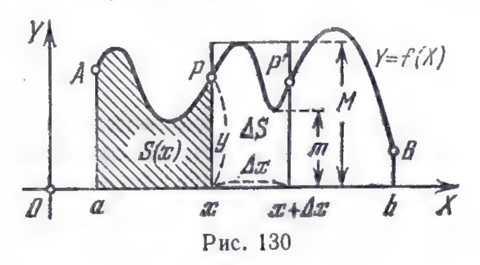


Рис. 130

Наглядно можно вообразить себе, что вдоль оси OX происходит наводнение и вертикальный фронт воды передвигается слева направо.

Пусть x получает приращение Δx (для определенности положим, что $\Delta x > 0$). Тогда площадь изменится на величину ΔS (рис. 130), представляющую собой площадь полоски, ограниченной дугой $\overset{\frown}{PP'}$ кривой, осью OX и двумя вертикалями $X = x$ и $X = x + \Delta x$. Положим

$$m = \min_{x \leqslant X \leqslant x+\Delta x} f(X)$$

и

$$M = \max_{x \leqslant X \leqslant x+\Delta x} f(X).$$

Сравнивая площадь ΔS с площадями прямоугольников с общим основанием Δx и высотами m и M, будем иметь

$$m\,\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M\,\Delta x\text{ [2])}. \qquad (1)$$

---

[1]) О понятии площади см. замечание к теореме § 9.

[2]) Равенство здесь не исключается, так как функция $f(X)$ может быть постоянной

Отсюда

$$m \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant M. \tag{2}$$

Пусть теперь $\Delta x \to +0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(X)$ имеем

$$m \to f(x) \text{ и } M \to f(x). \tag{3}$$

Отсюда на основании теоремы о пределе промежуточной переменной (гл. VII, § 8) получаем

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Аналогично, при $\Delta x \to -0$ будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = f(x). \tag{4}$$

Таким образом, *производная площади переменной криволинейной трапеции для любого значения аргумента $X = x$ равна ее концевой ординате $y = f(x)$* (теорема Ньютона—Лейбница).

Из формулы (4) получаем

$$dS = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Пусть S — полная площадь криволинейной трапеции (рис. 130), ограниченная кривой $Y = f(X)$, осью OX и двумя вертикалями $X = a$ и $X = b$. Интегрируя равенство (5) в пределах от a до b и учитывая, что $S(a) = 0$, на основании формулы (6) из § 1 будем иметь

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Таким образом, *определенный интеграл* (6) *от непрерывной неотрицательной функции при $a \leqslant b$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции*[1]) (геометрический смысл определенного интеграла).

---

[1]) Что следует понимать под площадью криволинейной трапеции в случае знакопеременной функции $f(x)$, см. § 5, замечание.

Пример. Найти площадь S одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ (рис. 131).

На основании геометрического смысла определенного интеграла имеем

$$S = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

(соответствующих квадратных единиц).

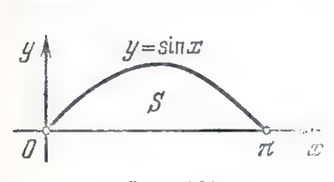


Рис. 131

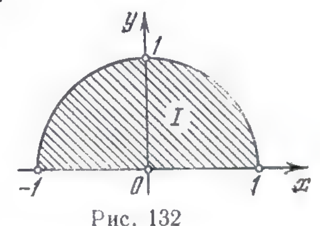


Рис. 132

Пример 2. Выяснить геометрический смысл интеграла

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \tag{7}$$

и, пользуясь этим, найти его значение.

Так как $y = \sqrt{1-x^2}$ есть уравнение верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, то интеграл I представляет собой площадь полукруга радиуса 1 (рис. 132).

Поэтому $I = \pi/2$; этот результат можно получить также непосредственным вычислением интеграла (7).

§ 4. Физический смысл определенного интеграла

Задача. Зная скорость $v = v(t)$ прямолинейного движения точки, найти пройденный ею путь за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$.



Рис. 133

Предполагая, что траекторией точки является ось Ox (рис. 133) и $x = x(t)$ есть уравнение движения, будем иметь (гл. IX, § 2)

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Отсюда

$$dx = v(t)\, dt. \tag{2}$$

Интегрируя равенство (2) в пределах от 0 до T, получим путь, пройденный точкой за время T:

$$s = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)\,dt\ ^{1)}. \qquad (3)$$

Замечание. Из (3) получаем уравнение движения точки

$$x = x_0 + \int_0^T v(t)\,dt,$$

где $x_0 = x(0)$.

Пример. На какую высоту за 10 с поднимается ракета, брошенная вертикально вверх, если ее скорость (км/с) меняется по закону

$$v = 2 + \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Чему равна средняя скорость полета ракеты за этот промежуток времени?

Путь, пройденный ракетой за 10 с, равен

$$s = \int_0^{10} \left[2 + \frac{1}{(t+1)^2}\right] dt = \left(2t - \frac{1}{t+1}\right)\Bigg|_0^{10} =$$

$$= \left(20 - \frac{1}{11}\right) - (0 - 1) \approx 20{,}91 \text{ км}.$$

Поэтому соответствующая средняя скорость ракеты равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{20{,}91}{10}\,\frac{\text{км}}{\text{с}} = 2{,}091\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

§ 5. Основные свойства определенного интеграла

При выводе основных свойств определенного интеграла мы будем исходить из формулы Ньютона — Лейбница (§ 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ при $x \in [a, b]$.

Для лучшей обозримости свойства определенного интеграла разобьем на группы.

---

[1]) Точнее, формула (3) дает приращение абсциссы движущейся точки, т. е. *перемещение точки за время* T. Пройденный путь получится в том случае, когда скорость $v(t)$ сохраняет постоянный знак, т. е. точка движется в одном и том же направлении (см. гл. IX, § 2).

А. Общие свойства.

I. *Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования*, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt,$$

где x, t — любые буквы.

Это свойство непосредственно вытекает из формулы (1).

II. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю* (на основании сделанного соглашения).

Заметим, что это определение соответствует и формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0.$$

III. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный.*

В самом деле, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (1) имеем

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx. \quad (2)$$

Б. Свойство аддитивности.

IV. *Если промежуток интегрирования $[a, b]$ разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку $[a, b]$, равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.*

Действительно, пусть, например, $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$, где $a \leqslant c \leqslant b$. Тогда, полагая $F'(x) = f(x)$, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \quad (3)$$

Замечание. Формула (3) остается верной, если c лежит вне отрезка $[a, b]$ и подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

В. Свойства линейности.

V. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.*

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$ и A — постоянная величина, тогда $AF(x)$ есть первообразная для $Af(x)$, так как

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Имеем

$$\int_a^b Af(x)\,dx = AF(x)\Big|_a^b = AF(b) - AF(a) =$$

$$= A[F(b) - F(a)] = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

VI. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.*

Действительно, рассмотрим, например, алгебраическую сумму

$$f(x) + g(x) - h(x) \tag{4}$$

трех непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, и пусть $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ — их первообразные, т. е.

$$F'(x) = f(x),\quad G'(x) = g(x),\quad H'(x) = h(x).$$

Тогда $F(x) + G(x) - H(x)$ является первообразной для суммы (4), так как

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) =$$
$$= f(x) + g(x) - h(x).$$

Отсюда имеем

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = [F(x) + G(x) - H(x)]\Big|_a^b =$$
$$= [F(b) + G(b) - H(b)] - [F(a) + G(a) - H(a)] =$$
$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] - [H(b) - H(a)] =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx.$$

Г. Свойства монотонности.

VII. *Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел*

интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

В самом деле, пусть $f(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Так как $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, то первообразная $F(x)$ есть возрастающая функция (точнее, неубывающая функция). В таком случае при $b \geqslant a$ имеем

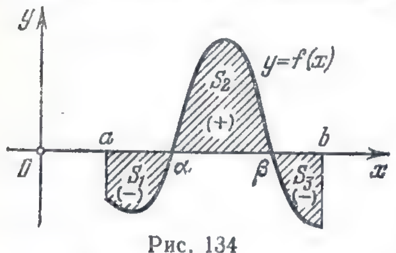


Рис. 134

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geqslant 0.$$

VIII. *Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать почленно при условии, что верхний предел интегрирования больше нижнего.*

Действительно, пусть $f(x) \leqslant g(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, где $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Так как $g(x) - f(x) \geqslant 0$, то при $b > a$ в силу свойств VI и VII имеем

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Замечание. Пусть $f(x)$ — знакопеременная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, где $b > a$. Например (рис. 134), $f(x) \leqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant \alpha$, $f(x) > 0$ при $\alpha < x < \beta$ и $f(x) \leqslant 0$ при $\beta \leqslant x \leqslant b$.

В силу свойства аддитивности IV, учитывая геометрический смысл интеграла (§ 3), имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3, \qquad (5)$$

где S_1, S_2, S_3 — площади соответствующих криволинейных трапеций.

Таким образом, *определенный интеграл, в общем случае, при $a < b$ представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, где площади трапеций, расположенных выше оси Ox, берутся*

со знаком плюс, а площади трапеций, расположенных ниже оси Ox,— со знаком минус.

Если $b < a$, то все обстоит наоборот.

Заметим, что площадь заштрихованной на рис. 134 фигуры выражается интегралом

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3 \qquad (b > a).$$

§ 6. Теорема о среднем

Теорема. *Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента*[1].

Доказательство. В самом деле, в силу формулы Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности первообразных теорему о конечном приращении функции (гл. XI, § 1), получим

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(c) = (b-a)\,f(c),$$

где $a < c < b$. Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c), \tag{2}$$

где $a < c < b$.

Замечание. Формуле (2) при $f(x) \geqslant 0$ можно дать простую геометрическую иллюстрацию. В самом деле, левая часть ее представляет собой площадь криволинейной трапеции $AabB$, где AB имеет уравнение $y = f(x)$ и a и b — абсциссы точек A и B. Правая же часть этой формулы выражает площадь прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой cC, равной $f(c)$ (рис. 135).

---

[1]) Предполагается, что верхний предел интегрирования больше нижнего.

Таким образом, формула (2) геометрически означает, что можно всегда подобрать на дуге AB такую точку C с абсциссой c, заключенной между a и b, что площадь соответствующего прямоугольника $aDEb$ с высотой cC будет в точности равна площади криволинейной трапеции $aABb$.

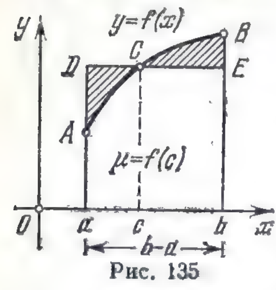


Рис. 135

Итак, *площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией, равновелика площади прямоугольника с тем же «основанием» и высотой, равной некоторой средней ординате линии.*

Число $f(c)=\mu$ носит название *среднего значения* функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Из формулы (2) имеем

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Пример 1. Сила переменного тока равна $i=i_0\sin\frac{2\pi t}{T}$, где $i_0>0$ — максимальное значение тока, T — период и t — время. Найти среднее значение квадрата силы тока за период T.

На основании формулы (3) имеем

$$\mu=\overline{i^2}=\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt=\frac{i_0^2}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi t}{T}\,dt,$$

где черта обозначает операцию усреднения. Так как $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, то

$$\overline{i^2}=\frac{i_0^2}{2T}\int_0^T\left(1-\cos\frac{4\pi t}{T}\right)dt=\frac{i_0^2}{2T}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}. \tag{4}$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата силы тока носит название *эффективной силы тока*, т. е. $i_{эфф}=\sqrt{\overline{i^2}}$. На основании формулы (4) получаем важный для электротехники результат:

$$i_{эфф}=i_0/\sqrt{2}. \tag{5}$$

Следствие. Пусть $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ и $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

Так как $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то при $a<b$ из формулы (2) имеем

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a). \tag{6}$$

Пример 2. Оценить интеграл $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Так как $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+\sin^2 x}\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, то на основании формулы (6) имеем $\pi/4\leqslant I\leqslant\pi/2$. Приближенно можно положить

$$I\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\approx\frac{1}{2}(0{,}79+1{,}57)=1{,}18.$$

Точное значение интеграла есть $I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\approx 1{,}12$.

§ 7. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые[1]) функции на отрезке $[a, b]$.

Имеем

$$d[u(x)v(x)]=v(x)\,du(x)+u(x)\,dv(x).$$

Интегрируя это равенство в пределах от a до b и учитывая, что

$$du(x)=u'(x)\,dx \quad\text{и}\quad dv(x)=v'(x)\,dx,$$

находим

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx+\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Отсюда получаем *формулу интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Для краткости употребляется обозначение

$$u(b)v(b)-u(a)v(a)=u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Пример. Найти $\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,dx$.

Полагая $u=x$, $dv=\cos x\,dx=d(\sin x)$, получим $du=dx$, $v=\sin x$.

Применяя формулу (1), будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,dx=x\sin x\Big|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\sin x\,dx=$$

$$=2\pi\sin 2\pi-0\cdot\sin 0+\cos x\Big|_0^{2\pi}=\cos 2\pi-\cos 0=0.$$

---

[1]) То есть имеющие непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

§ 8. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, и пусть по каким-то соображениям нам желательно ввести новую переменную t, связанную с прежней x соотношением

$$x = \varphi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \qquad (2)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$. Если при этом: 1) при изменении t от α до β переменная x меняется от a до b, т. е.

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \psi(\beta) = b, \qquad (3)$$

и 2) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ [1]), то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Для доказательства рассмотрим сложную функцию

$$F(\varphi(t)),$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

следовательно, функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Отсюда, на основании формулы Ньютона — Лейбница, учитывая равенства (3), будем иметь

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) Если значения $\varphi(t)$ не выходят из отрезка $[a, b]$, то условие 2) излишне (см. теорему о непрерывности сложной функции, гл. VIII, § 4, теорема 4).

Замечание. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно лишь ввести новые пределы интегрирования по формулам (3).

Пример. Вычислить

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx. \tag{5}$$

Естественно положить

$$t=\sqrt{1+x}, \tag{6}$$

отсюда $x=t^2-1$ и $dx=2t\,dt$. Новые пределы интегрирования определяются из формулы (6): полагая $x=0$, будем иметь $t=1$ и, полагая $x=3$, получим $t=2$. Следовательно,

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx=\int_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt=2\int_1^2 (t^4-t^2)\,dt=$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=2\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right)=\frac{62}{5}-\frac{14}{3}=7\frac{11}{15}.$$

§ 9. Определенный интеграл как предел интегральной суммы

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть для определенности $f(x)\geqslant 0$ на $[a, b]$, где $a<b$. Тогда ее определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной данной кривой $y=f(x)$,

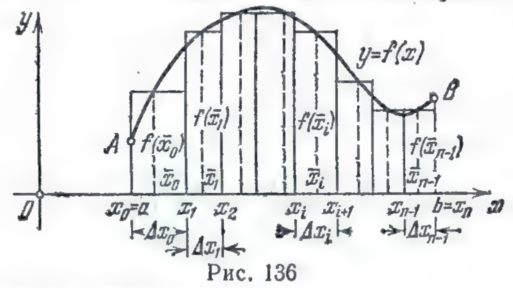


Рис. 136

осью Ox $(y=0)$ и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$ (рис. 136).

Еще свыше 2000 лет тому назад греческие математики для приближенного вычисления площади S употребляли

следующий прием: разобьем фигуру S[1]) на весьма большое число вертикальных полосок, ограниченных перпендикулярами к оси Ox, проведенными в точках

$$x_0=a,\ x_1, x_2, \ldots, x_n=b \quad (a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b).$$

Каждую из этих полосок приближенно можно считать за прямоугольник с основанием $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ и некоторой промежуточной высотой $f(\bar{x}_i)$, где $x_i\leqslant\bar{x}_i\leqslant x_{i+1}$. Тогда площадь одного такого прямоугольника, очевидно, равна

$$f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

и, следовательно, площадь ступенчатой фигуры, состоящей из n таких прямоугольников, будет

$$S_n=f(\bar{x}_0)\,\Delta x_0+f(\bar{x}_1)\,\Delta x_1+\ldots+f(\bar{x}_{n-1})\,\Delta x_{n-1} \tag{2}$$

или короче

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i, \tag{2'}$$

где буква $\sum$ обозначает знак суммирования (сложения) и под этим знаком выписан общий (типичный) член слагаемых; при этом указано, сколько слагаемых и какие именно входят в состав суммы.

Сумма (2) или (2′) называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$[2]). Так как при $n\to\infty$ и $\max\limits_i|\Delta x_i|\to 0$ наши полоски в пределе обращаются в ординаты графика функции $y=f(x)$, то естественно ожидать, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Действительно, справедлива следующая

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел ее интегральной суммы S_n при $n\to\infty$ и $\max\limits_i|\Delta x_i|\to 0$ равен соответствующему определенному*

---

[1]) Здесь мы криволинейную трапецию и ее площадь обозначаем одной и той же буквой S. Разница между ними видна из контекста.

[2]) Понятие интегральной суммы (2′) естественно обобщается на случай знакопеременной функции.

интегралу этой функции, т. е.

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx\,^{1)}. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Положим $S = \int_a^b f(x)\,dx$. В силу свойства аддитивности (§ 5, IV) имеем

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Отсюда, применяя теорему о среднем (§ 6), будем иметь

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (5)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$ и $\xi_i \in [x_i,\ x_{i+1}]$.

Рассмотрим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i, \qquad (6)$$

где $\bar{x}_i \in [x_i,\ x_{i+1}]$.

Из формул (5) и (6) получаем

$$S - S_n = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) - f(\bar{x}_i)]\,\Delta x_i. \qquad (7)$$

Отсюда

$$|S - S_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i) - f(\bar{x}_i)|\,|\Delta x_i|. \qquad (8)$$

Если ε — произвольное положительное число, то при достаточно малом $\max|\Delta x_i|$, в силу непрерывности функции $f(x)$, обеспечены неравенства

$$|f(\xi_i) - f(\bar{x}_i)| < \varepsilon \qquad (9)$$

(свойство равномерной непрерывности функции $f(x)$, см., например, Никольский С. М. Курс

[1]) В этом смысле знак интеграла представляет собой стилизованную букву S (знак суммы), а обозначение всего определенного интеграла является сокращенной записью суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых вида $f(x)\,\Delta x = f(x)\,dx$ на отрезке $[a, b]$ (с нашей точки зрения предел такой суммы).

математического анализа, т. I, гл. 9)). Поэтому из (9) и (8) получаем

$$|S-S_n|<\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon\Delta x_i=\varepsilon(b-a), \qquad (10)$$

где $(b-a)$ — длина отрезка $[a, b]$.

Из неравенства (10), ввиду произвольности числа ε, вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S, \qquad (11)$$

т. е. справедливо равенство (3).

Замечание. Если $y=f(x)\geqslant 0$ на $[a, b]$, то под площадью криволинейной трапеции $aABb$ по определению мы будем понимать число

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n,$$

предполагая, что этот предел существует.

Следствие. *Если функция* $f(x)\geqslant 0$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то криволинейная трапеция* $\{a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ *имеет конечную площадь*, т. е. является *квадрируемой фигурой*.

§ 10. Понятие о приближенном вычислении определенных интегралов

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

от заданной непрерывной функции $y=f(x)$ точно вычисляется далеко не всегда. Однако, пользуясь его геометрическим смыслом, можно дать ряд приближенных формул, с помощью которых этот интеграл находится с любой степенью точности. Мы здесь рассмотрим простейшую из них, так называемую *формулу трапеций*.

Как известно (§ 3), интеграл (1) представляет собой площадь (с учетом знака — см. замечание на с. 276) криволинейной трапеции, ограниченной линией $y=f(x)$, осью Ox и двумя ординатами $x=a$ и $x=b$ (рис. 137).

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h=\frac{b-a}{n}$ (*шаг разбиения*).

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_0=a$, $x_n=b$) — абсциссы точек деления и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — соответствующие ординаты кривой. Имеем расчетные формулы

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = f(x_i)$$

($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). В результате построения наша криволинейная трапеция разбилась на ряд вертикальных

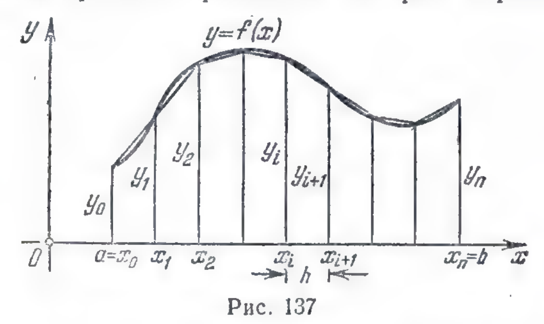


Рис. 137

полосок одной и той же ширины h, каждую из которых приближенно примем за трапецию. Суммируя площади этих трапеций, будем иметь

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

или

$$\int_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (2)$$

(*формула трапеций*). Формулу (2) можно коротко записать в виде

$$\int_a^b y\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_i = 1/2$ при $i=0$ и $i=n$ и $\varepsilon_i = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Погрешность

$$R_n = \int_a^b y\,dx - h\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i$$

называется *остаточным членом* формулы трапеций (3). Доказано, что если функция $y=f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$|R_n| \leqslant \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \quad \text{где} \quad M_2 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

(см. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1970, гл. XVI).

Пример. Приближенно вычислить $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = I$.

Разобьем промежуток интегрирования [0, 1] на 10 частей ($n=10$); следовательно, шаг $h=0{,}1$.

Абсциссы точек деления x_i ($i=0, 1, \ldots, 10$) и соответствующие им ординаты $y_i=\sqrt{1+x_i^2}$, вычисленные с помощью таблицы квадратных корней, приведены в таблице, причем ординаты y_i для удобства умножены на множитель ε_i такой, что $\varepsilon_i=1/2$ при $i=0$ и $i=10$ (отмечены звездочкой) и $\varepsilon_i=1$ при $i=1, 2, \ldots, 9$.

i	x_i	$\varepsilon_i y_i$
0	0,0	0,5000 *
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	0,7071 *
Σ		11,4838

По формуле (3) имеет $I \approx 0{,}1 \cdot 11{,}4838 \approx 1{,}148$. Точное значение интеграла равно $I=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1{,}1479$.

§ 11. Формула Симпсона

Более точную формулу мы получим, если профиль криволинейной полоски будем считать параболическим.

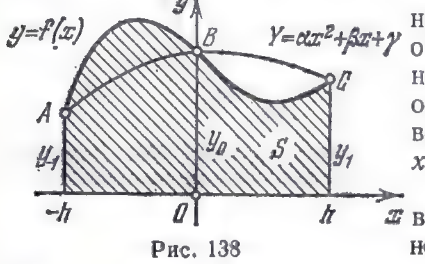


Рис. 138

Рассмотрим вертикальную полоску (рис. 138), ограниченную непрерывной кривой $y=f(x)$, осью Ox ($y=0$) и двумя вертикалями $x=-h$ и $x=h$.

Если h мало, то кривую $y=f(x)$ приближенно можно заменить пара-

болой

$$Y=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \qquad (1)$$

проходящей через точки $A(-h,\ y_{-1})$, $B(0,\ y_0)$ и $C(h,\ y_1)$. Тогда

$$\int_{-h}^{h} y\,dx = I$$

приближенно будет равен

$$\int_{-h}^{h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx=\left(\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right)\Big|_{-h}^{h}=\frac{2\alpha}{3}h^3+2\gamma h. \qquad (2)$$

Полагая в формуле (1) последовательно $x=-h,\ 0,\ h$, получаем

$$y_{-1}=\alpha h^2-\beta h+\gamma, \quad y_0=\gamma, \quad y_1=\alpha h^2+\beta h+\gamma. \qquad (3)$$

Отсюда

$$\gamma=y_0, \quad \alpha=\frac{y_{-1}-2y_0+y_1}{2h^2}. \qquad (4)$$

Подставляя эти значения в формулу (2), будем иметь

$$\int_{-h}^{h} y\,dx \approx \frac{1}{3}h(y_{-1}-2y_0+y_1)+2y_0h=\frac{h}{3}(y_{-1}+4y_0+y_1) \qquad (5)$$

(*формула Симпсона*).

Пример. Пользуясь формулой Симпсона, найти

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx.$$

Полагая $h=\pi/2$, имеем $y_{-1}=0$, $y_0=1$, $y_1=0$. Следовательно,

$$I\approx\frac{\pi}{6}(0+4+0)=\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}07$$

(точное значение $I=2$).

Используя параллельный перенос системы координат, формулу Симпсона можно писать в виде

$$\int_{a}^{b} y\,dx\approx\frac{h}{3}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right], \qquad (5')$$

где $h=\frac{b-a}{2}$.

Замечание. Для увеличения точности вычисления определенного интеграла $\int_a^b y\,dx$ промежуток интегрирования $[a, b]$ разбивают на n частичных промежутков, где n — достаточно большое натуральное число, и к каждому из них применяют формулу Симпсона (5′), полагая $h=\frac{b-a}{2n}$. В силу свойства аддитивности данный определенный интеграл будет приближенно представлять сумму полученных так результатов (*параболическая формула*) (см. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1970, гл. XVI, § 3).

§ 12. Несобственные интегралы

При определении интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

предполагалось, что: 1) промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен и 2) подынтегральная функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Такой определенный интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если нарушается по меньшей мере одно из

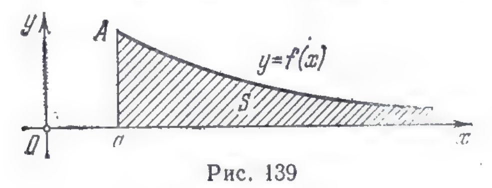


Рис. 139

двух условий: 1) или 2), то символ (1) будем называть *несобственным определенным интегралом*. Выясним смысл этого нового понятия для двух простейших случаев.

I. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$. Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если предел (2) существует, то *несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования*, стоящий в левой части равенства (2), называется *сходящимся* и его значение определяется формулой (2); в противном случае равенство (2) теряет смысл, несобственный интеграл, стоя-

щий слева, называется *расходящимся* и ему не приписывается никакого числового значения.

Геометрически для неотрицательной на $[a, \infty)$ функции $f(x)$ несобственный интеграл (2) представляет собой площадь криволинейной фигуры, ограниченной данной линией $y=f(x)$, осью Ox и вертикалью $x=a$ (рис. 139).

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. На основании формулы (2) имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b)-F(a)].$$

Если ввести условное обозначение

$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b),$$

то получим для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования *обобщенную формулу Ньютона — Лейбница:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a), \tag{3}$$

где $F'(x)=f(x)$.

Пример 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

II. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$ и имеет точку разрыва при $x=b$. Тогда соответствующий *несобственный интеграл от разрывной функции* определяется формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{4}$$

и называется *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, существует или не существует предел правой части равенства (4).

Если существует функция $F(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и такая, что

$$F'(x) = f(x) \quad \text{при} \quad a \leqslant x < b$$

(*обобщенная первообразная*), то для несобственного интеграла (4) справедлива обобщенная формула

Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} [F(b-\varepsilon)-F(a)] =$$
$$= F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Пример 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2-0=2.$

Упражнения

1. Вычислить определенный интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$ и указать его геометрический смысл.

Вычислить определенные интегралы:

2. $\int_0^1 x^4\,dx$. 3. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. 4. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5. $I = \int_x^y e^{t^2}\,dt$. Найти: а) $\frac{dI}{dy}$; б) $\frac{dI}{dx}$.

6. Найти среднее значение функции $f(x)=\sqrt{x}$ на отрезке [1; 9].

7. С помощью интегрирования по частям вычислить интегралы:

а) $\int_0^{2\pi} x\sin 2x\,dx$; б) $\int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$.

8. Произведя указанную замену переменной, вычислить интегралы:

а) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$, $x=2\sin t$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, $x=t^2$.

9. Приближенно вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ а) по формуле трапеций, б) по формуле Симпсона, разделив отрезок [0; 1] на $n=10$ равных частей. Результаты вычислений сравнить с точным значением интеграла, равным $\ln 2 \approx 0{,}69315$.

10. Вычислить следующие несобственные интегралы:

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; б) $\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

ГЛАВА XV

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Площадь в прямоугольных координатах

Задача 1. Найти площадь S криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной данной непрерывной линией $y=f(x)$, отрезком $a \leqslant x \leqslant b$ оси Ox и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, если $f(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 140).

На основании геометрического смысла определенного интеграла имеем

$$S=\int_a^b y\,dx, \qquad (1)$$

где $y=f(x)$ — данная функция.

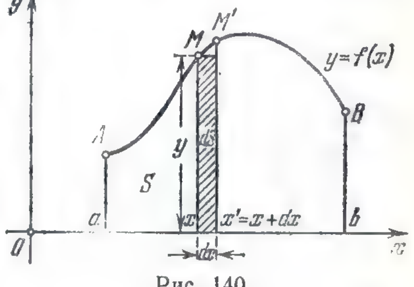


Рис. 140

Замечание. Формулу (1) можно обосновать иначе. Будем рассматривать площадь S как переменную величину, образованную перемещением текущей ординаты $xM=y$ из начального положения aA в заключительное положение bB. Давая текущей абсциссе x приращение $\Delta x=dx$, получим приращение площади ΔS, представляющее собой площадь вертикальной плоскости $xMM'x'$, заключенной между ординатами в точках x и $x'=x+dx$ (рис. 140). Дифференциал площади dS есть главная линейная часть приращения ΔS при $\Delta x \to 0$ и, очевидно, равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y[1]); поэтому

$$dS=y\,dx \qquad (2)$$

[1]) Можно строго доказать, что для непрерывной функции $y=f(x)$ площадь прямоугольника $y\,dx$ отличается от площади полоски ΔS на величину высшего порядка малости относительно dx.

(*элемент площади в прямоугольных координатах*). Интегрируя равенство (2) в пределах от $x=a$ до $x=b$, будем иметь формулу (1):

$$S=\int_a^b y\,dx.$$

Здесь на частном примере показано применение так называемого **метода дифференциала**, сущность которого заключается в том, что сначала из элементарных соображений составляется дифференциал искомой величины, а затем после интегрирования в соответствующих пределах находится значение самой искомой величины. Более подробно этот метод развит в теории дифференциальных уравнений (гл. XXII).

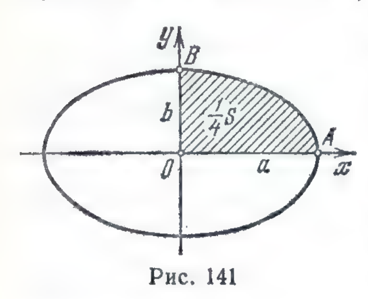


Рис. 141

В следующих параграфах на конкретных примерах мы ознакомимся с двумя основными методами в теории определенного интеграла: 1) методом интегральных сумм (см. гл. XIV, § 9) и 2) методом дифференциала.

Пример 1. Найти площадь S области, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ввиду симметрии можно ограничиться вычислением 1/4 площади S (рис. 141).

Из уравнения эллипса для I квадранта имеем $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Отсюда по формуле (1) получаем

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Применим тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$. Новые пределы интегрирования $t=\alpha$ и $t=\beta$ определяются из уравнений $0=a\sin t$, $a=a\sin t$. Можно положить $\alpha=0$ и $\beta=\pi/2$.

Следовательно,

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}ab$$

и

$$S=\pi ab.$$

В частности, полагая $a=b$, получим площадь круга $S=\pi a^2$ с радиусом a.

Замечание. В более сложных случаях фигуру стараются представить в виде суммы или разности криволинейных трапеций.

Задача 2. Найти площадь области, ограниченной двумя непрерывными линиями:

$$y_1=f_1(x), \quad y_2=f_2(x) \quad (y_2 \geqslant y_1)$$

и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$ (рис. 142).

Будем предполагать, что $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ — неотрицательные функции на $[a, b]$. Этого всегда можно добиться путем параллельного переноса оси Ox.

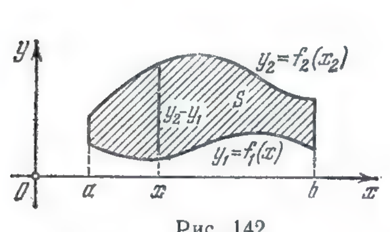


Рис. 142

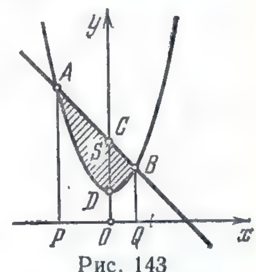


Рис. 143

Искомую площадь S можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций, ограниченных данными линиями. Поэтому

$$S=\int_a^b y_2\,dx-\int_a^b y_1\,dx$$

и, следовательно,

$$S=\int_a^b (y_2-y_1)\,dx, \qquad (3)$$

где $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ — данные функции. Заметим, что

$$y_2-y_1=f_2(x)-f_1(x)$$

представляет собой «толщину» площади S в точке x.

Пример 2. Определить площадь S, ограниченную параболой $y=x^2+1$ и прямой $x+y=3$ (рис. 143).

Решая совместно систему уравнений параболы и прямой:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2+1,\\ x+y&=3,\end{aligned}\right\}$$

находим абсциссы точек пересечения: $x_1=-2$ и $x_2=1$.

Полагая $y_2 = 3 - x$ и $y_1 = x^2 + 1$, на основании формулы (3) получим

$$S = \int_{-2}^{1} [(3-x) - (x^2+1)]\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= 2(1+2) - \frac{1}{2}(1-4) - \frac{1}{3}(1+8) = 6 + \frac{3}{2} - 3 = 4\frac{1}{2}.$$

Формула (1) дает возможность вычислять также площади простых фигур, уравнение контура которых задано параметрически.

Пример 3. Найти площадь S, ограниченную первой аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{4}$$

и осью Ox (гл. V, § 4, рис. 47). стр.75

Имеем

$$S = \int_{0}^{2\pi a} y\, dx.$$

Произведем в этом интеграле замену переменных, приняв за независимую переменную параметр t. Из уравнений (4) получим

$$dx = a(1 - \cos t)\, dt,$$

причем имеем $t = 0$ при $x = 0$ и $t = 2\pi$ при $x = 2\pi a$. Следовательно,

$$S = \int_{0}^{2\pi} a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= a^2 \left[(t - 2\sin t)\Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt \right] =$$

$$= a^2 \left[2\pi + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{2\pi} \right] = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

Таким образом, получаем теорему Галилея: *площадь, ограниченная аркой циклоиды и ее хордой, равна утроенной площади производящего круга.*

§ 2. Площадь в полярных координатах

Задача. Найти площадь S сектора OAB, ограниченного данной непрерывной линией

$$\rho = f(\varphi)$$

и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, где ρ и φ — полярные координаты (рис. 144).

Для решения задачи используем метод дифференциала.

Представим себе, что площадь S возникла в результате перемещения переменного полярного радиуса $\rho=f(\varphi)$ при φ, меняющемся от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$ (рис. 144). Если текущий полярный угол φ получит приращение $d\varphi$, то приращение площади $\Delta S=$ пл. OMM'. Дифференциал dS представляет собой главную линейную часть приращения ΔS при $d\varphi\to 0$ и равен площади кругового сектора OMN радиуса ρ с центральным углом $d\varphi$ [1]); поэтому

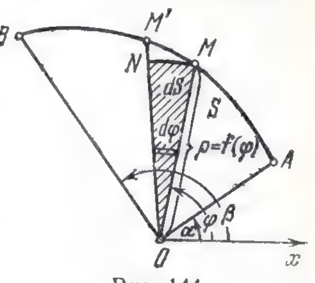


Рис. 144

$$dS=\frac{1}{2}\,\widehat{MN}\cdot OM=\frac{1}{2}\,\rho\,d\varphi\cdot\rho=\frac{1}{2}\,\rho^2\,d\varphi \qquad (1)$$

(*элемент площади в полярных координатах*). Интегрируя равенство (1) в пределах от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$, получим искомую площадь

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\varphi,$$

где $\rho=f(\varphi)$ — данная функция.

Пример. Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\rho=a(1+\cos\varphi).$$

Составляя таблицу значений, получим

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2}{3}\pi$	$\pm\frac{5}{6}\pi$	$\pm\pi$
ρ	$2a$	$\approx 1{,}9a$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{a}{2}$	$\approx 0{,}1a$	0

[1]) Действительно, по аналогии с физическим смыслом дифференциала (гл. XII, § 4), дифференциал площади dS равен фиктивному приращению площади S при повороте на угол $d\varphi$ полярного радиуса ρ, при условии, что последний сохраняет постоянную величину. Отсюда ясно, что dS есть площадь кругового сектора радиуса ρ с центральным углом $d\varphi$.

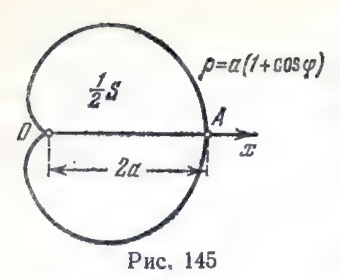


Рис. 145

Построив точки кардиоиды по значениям φ и ρ из нашей таблицы, можно составить приближенное представление о форме этой кривой (рис. 145).

Так как кардиоида, очевидно, симметрична относительно полярной оси, то достаточно определить верхнюю половину площади, а затем ее удвоить. Обозначая всю площадь, ограниченную кардиоидой, через S, будем иметь $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \rho^2\,d\varphi$. Отсюда

$$S=\int\limits_0^\pi \rho^2\,d\varphi=a^2\int\limits_0^\pi (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\int\limits_0^\pi d\varphi+2\int\limits_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^\pi \cos^2\varphi\,d\varphi\right).$$

Или, так как

$$\int\limits_0^\pi d\varphi=\pi,\quad \int\limits_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi=\sin\varphi\Big|_0^\pi=0,$$

$$\int\limits_0^\pi \cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{2},$$

то окончательно

$$S=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

§ 3. Длина дуги в прямоугольных координатах

Определение. *Под длиной дуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.*

Назовем кривую *гладкой*, если эта кривая непрерывна и в каждой точке имеет касательную, непрерывно меняющую свое положение от точки к точке. Очевидно, кривая будет гладкой, если уравнение ее может быть записано в виде

$$y=f(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b), \tag{1}$$

где функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $f'(x)$ на данном отрезке $[a, b]$.

Теорема. *Всякая гладкая кривая* (1) *имеет определенную конечную длину дуги.*

Доказательство. Впишем в данную гладкую кривую (1) ломаную линию $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ (рис. 146), где $M_0 = A(a, f(a))$ и $M_n = B(b, f(b))$. Проектируя звенья $\overline{M_{i-1}M_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ломаной на ось Ox, получим

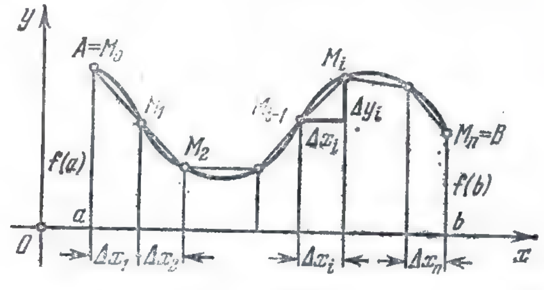


Рис. 146

разбиение отрезка $[a, b]$ на систему отрезков Δx_i. Пусть Δy_i — приращение данной функции $y = f(x)$ на отрезке Δx_i (рис. 146). По теореме Пифагора имеем

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении функции (гл. XI, § 1), получим $\Delta y_i = \Delta x_i f'(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_i$ — некоторая промежуточная точка отрезка Δx_i [1]). Отсюда

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)}\,\Delta x_i,$$

и следовательно, длина всей ломаной $M_0M_1 \ldots M_n$ (т. е. ее периметр) равна

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)}\,\Delta x_i.$$

Чтобы найти длину l кривой (1), нужно в последнем выражении перейти к пределу, предполагая, что $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$. Таким образом,

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)}\,\Delta x_i.$$

[1]) Геометрически $\bar{x}_i$ есть та точка отрезка Δx_i, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна его хорде $\overline{M_{i-1}M_i}$.

Мы получили предел интегральной суммы для непрерывной функции

$$F(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}$$

(см. гл. XIV, § 9). Поэтому $l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$, или

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx\,, \qquad (2)$$

где $y'=f'(x)$.

Дифференциал дуги в прямоугольных координатах. Пусть одна точка $A(a, h)$ кривой фиксирована, а другая $M(x, y)$ — переменная (рис. 147). В таком случае длина дуги $l=\smile AM$ есть некоторая функция от переменной x. Согласно формуле (2) мы имеем

$$l=\int_a^x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Отсюда, используя теорему о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом (гл. XIV, § 2), получим

$$l'=\sqrt{1+y'^2}$$

и, следовательно,

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Это и есть *формула дифференциала дуги в прямоугольных координатах*.

Так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}. \qquad (3)$$

Любопытно отметить, что последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MTP (рис. 147).

Пример 1. Вычислим длину дуги отрезка *цепной линии*. Так называется линия, форму которой принимает тяжелая нить, закрепленная в двух точках.

Уравнение этой линии в надлежащим образом выбранной системе координат такое:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right), \qquad (4)$$

где a — некоторое положительное число (*параметр цепной линии*).

Уравнение (4) проще записать так:

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}, \qquad (4')$$

где ch — гиперболический косинус (см. гл. X, § 9).

Точка $A(0, a)$, являющаяся наиболее низкой точкой кривой (4) (рис. 148), называется *вершиной* цепной линии.

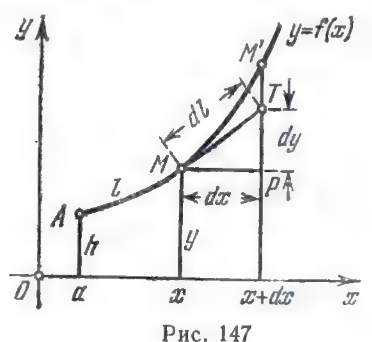


Рис. 147

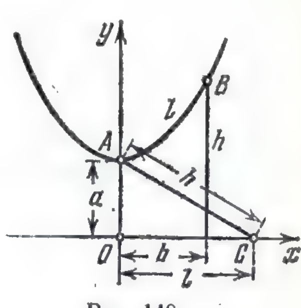


Рис. 148

Вычислим длину дуги AB цепной линии, предполагая, что абсцисса точки B равна b, а ордината ее равна h. Дифференцируя уравнение (4′), будем иметь

$$y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}.$$

Далее выводим $1 + y'^2 = 1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a} = \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}$. Следовательно,

$$\sqrt{1 + y'^2} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Отсюда согласно формуле (2) получим

$$\widehat{AB} = \int_0^b \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = a\int_0^b \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\Big|_0^b =$$

$$= a\left(\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} - \mathrm{sh}\,0\right) = a\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}$$

(см. формулу XIV § 3 гл. XIII).

Формула для длины дуги AB принимает более простой вид, если правую часть ее выразить через ординату h точки B. В самом деле, очевидно,

$$h = a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}.$$

В силу тождества $\mathrm{sh}^2\,\frac{b}{a} = \mathrm{ch}^2\,\frac{b}{a} - 1$ имеем

$$\widehat{AB} = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\,\frac{b}{a} - 1} = \sqrt{h^2 - a^2},$$

т. е. дуга AB равна катету OC прямоугольного треугольника OAC (рис. 148), гипотенуза которого $AC=h$ и другой катет $OA=a$.

Замечание. Пусть требуется найти длину дуги l кривой, заданной параметрически:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ [t_0\leqslant t\leqslant T],$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[t_0, T]$. Можно доказать, что формула (3) для дифференциала дуги dl будет справедлива и в этом случае. Так как $dx=x'\,dt$, $dy=y'\,dt$, то имеем

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от $t=t_0$ до $t=T$, получим длину дуги

$$l=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \qquad (5)$$

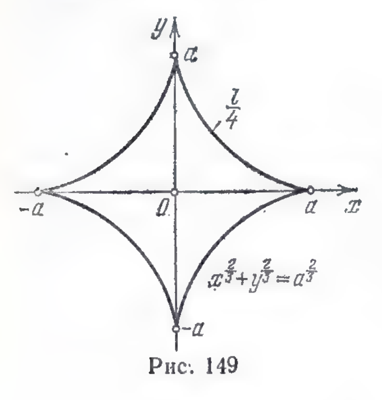


Рис. 149

Пример 2. Найти длину дуги окружности

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t$$

от $t=0$ до $t=T$.

Здесь $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=a\cos t\,dt$, поэтому

$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=a\,dt$$

и, следовательно,

$$l=\int_0^T a\,dt=aT.$$

Пример 3. Найти длину дуги астроиды

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

(рис. 149). Уравнение астроиды можно записать в виде

$$(x^{1/3})^2+(y^{1/3})^2=(a^{1/3})^2.$$

Естественно ввести параметр t, полагая $x^{1/3}=a^{1/3}\cos t$, $y^{1/3}=a^{1/3}\sin t$. Отсюда получаем *параметрические уравнения астроиды*

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t, \qquad (6)$$

где $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Ввиду симметрии кривой (6) достаточно найти 1/4 длины дуги l, соответствующую изменению параметра t от 0 до $\pi/2$. Имеем

$$dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt,\ dy=3a\sin^2 t\cos t\,dt.$$

Отсюда

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=3a\sin t\cos t\,dt.$$

Интегрируя это выражение в пределах от $t=0$ до $t=\pi/2$, получим

$$\frac{l}{4}=\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=$$

$$=\frac{3a}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{4}(1+1)=\frac{3}{2}a.$$

Следовательно, вся длина дуги астроиды равна $l=\frac{3}{2}a\cdot 4=6a$.

§ 4. Длина дуги в полярных координатах

Выведем сначала дифференциал dl дуги в полярных координатах. На основании формулы (3) из § 3 имеем

$$(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2,$$

где x и y — прямоугольные декартовы координаты точки дуги.

Как известно, формулы перехода от полярных координат ρ и φ к прямоугольным x и y следующие:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.$$

Отсюда

$$dx=\cos\varphi\,d\rho-\rho\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,d\rho+\rho\cos\varphi\,d\varphi.$$

Возведя в квадрат, получим

$$(dx)^2=\cos^2\varphi\,(d\rho)^2-2\rho\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\,(d\varphi)^2,$$
$$(dy)^2=\sin^2\varphi\,(d\rho)^2+2\rho\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi+\rho^2\cos^2\varphi\,(d\varphi)^2.$$

Складывая эти равенства почленно, будем иметь

$$(dl)^2=(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2.$$

Следовательно,

$$dl=\sqrt{(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2}.$$

Последнюю формулу можно представить в таком виде:

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi, \qquad (1)$$

где $\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}$.

Задача. Найти длину дуги l непрерывно дифференцируемой кривой

$$\rho=f(\varphi)$$

между точками $A(\alpha, f(\alpha))$ и $B(\beta, f(\beta))$, где ρ и φ — полярные координаты (рис. 150). Интегрируя равенство (1) в пределах от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$, получим длину *дуги в полярных координатах*

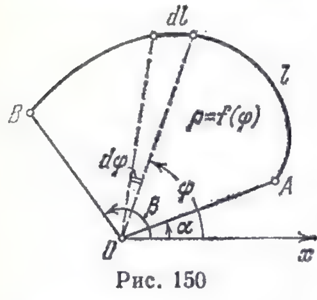


Рис. 150

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,$$

где $\rho=f(\varphi)$ — заданная функция и $\rho'=f'(\varphi)$ — ее производная.

Пример. Вычислим полную длину дуги кардиоиды (рис. 145)

$$\rho=a(1+\cos\varphi).$$

Имеем $\rho'=-a\sin\varphi$. Поэтому

$$\rho^2+\rho'^2=a^2(1+2\sin\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=$$
$$=a^2(2+2\cos\varphi)=2a^2(1+\cos\varphi)=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

и, следовательно, $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. Обозначая длину дуги верхней части кардиоиды через $\frac{1}{2}l$, получим

$$\frac{1}{2}l=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=4a.$$

Отсюда для длины дуги l всей кардиоиды, ввиду симметрии верхней и нижней части ее, находим $l=8a$.

§ 5. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям

Задача. Зная закон изменения площади поперечного сечения тела, найти объем V этого тела (рис. 151).

Пусть Ox — некоторое выбранное направление и

$$S=S(x)$$

— площадь поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x. Функцию $S(x)$ будем предполагать известной и непрерывно меняющейся при изменении x. Кроме того, будем предполагать, что, в некотором смысле, контур сечения изменяется также «непрерывно».

Проектируя тело на ось Ox, получим некоторый отрезок $[a, b]$, дающий линейный размер тела в направлении оси Ox.

Разделим отрезок $[a, b]$ на большое число мелких частей Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные оси Ox. В результате наше тело разобьется на n слоев, каждый из которых приближенно может быть принят за цилиндр. Так как объем i-го слоя приближенно равен $S(x_i)\Delta x_i$, где x_i — некоторая точка отрезка Δx_i (см. рис. 151), то для объема тела V получаем выражение

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Если $n \to \infty$, причем $\max|\Delta x_i| \to 0$, то приближенное равенство (1) становится все более точным, и в пределе мы получим

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i.$$

Сумма (1) представляет собой интегральную сумму для непрерывной функции $S(x)$, и ее предел есть соответст-

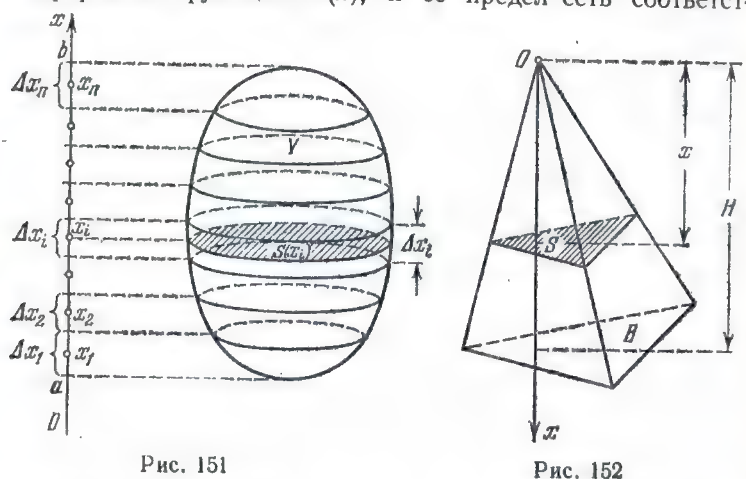


Рис. 151

Рис. 152

вующий определенный интеграл (гл. XIV, § 9). Поэтому

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти объем V пирамиды с площадью основания B и высотой H (рис. 152).

За ось Ox примем прямую, проходящую через вершину O пирамиды, перпендикулярно основанию ее и направленную от вершины к основанию.

Пусть S — площадь сечения пирамиды плоскостью, находящейся на расстоянии x от вершины. Так как площади параллельных сечений пирамиды относятся как квадраты расстояний их от вершины, т. е. $\frac{S}{B}=\frac{x^2}{H^2}$, то $S=\frac{B}{H^2}x^2$. Из формулы (2) предыдущего параграфа получаем

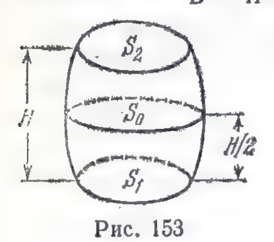


Рис. 153

$$V=\int_0^H S\,dx=\frac{B}{H^2}\int_0^H x^2\,dx=\frac{B}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\frac{1}{3}BH,$$

что согласуется с известной формулой геометрии.

Пример 2. Пусть (рис. 153) S_1 и S_2 — площади нижнего и верхнего сечений «бокчообразного» тела, а S_0 — площадь его среднего сечения. Тогда, применяя формулу Симпсона (гл. XIV, § 11) к интегралу (2), получим

$$V=\int_0^H S(x)\,dx\approx\frac{H}{6}(S_1+S_2+4S_0),$$

где H — высота тела (*кубатурная формула Симпсона*).

§ 6. Объем тела вращения

Задача. Найти объем тела V_x, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной данной непрерывной линией

$$y=f(x)\quad (f(x)\geqslant 0),$$

отрезком $a\leqslant x\leqslant b$ оси Ox и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$ (рис. 154).

Эта задача представляет частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Здесь площадь переменного поперечного сечения $S=S(x)$, соответствующего абсциссе x, есть круг радиуса y, поэтому $S(x)=\pi y^2$. Отсюда на основании формулы (2) § 5 имеем

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx, \tag{1}$$

где $y=f(x)$ — данная функция.

Формулу (1) можно также получить непосредственно методом дифференциала. *Элемент объема* dV_x, очевидно, представляет собой

цилиндр с основанием S и высотой dx [1]). Следовательно,

$$dV_x = \pi y^2\, dx.$$

Отсюда, интегрируя в пределах от $x=a$ до $x=b$, получим формулу (1).

Замечание. Пусть криволинейная трапеция $cCDd$, ограниченная однозначной непрерывной линией $x=g(y)$,

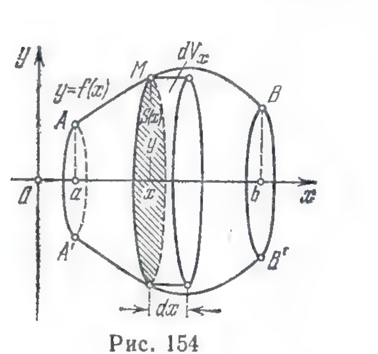


Рис. 154

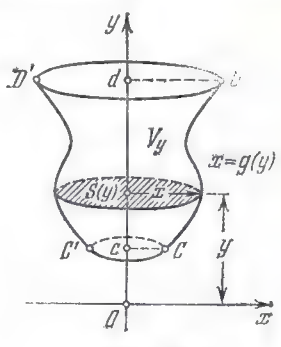


Рис. 155

отрезком $c \leqslant y \leqslant d$ оси Oy и двумя параллелями $y=c$ и $y=d$, вращается вокруг оси Oy (рис. 155). Тогда объем тела вращения V_y, по аналогии с формулой (1), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\, dy, \tag{2}$$

где $x=g(y) \geqslant 0$ — данная функция.

Пример. Определить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной от вращения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

вокруг большой оси a (ось Ox) (рис. 156).

Так как эллипс (3) симметричен относительно осей координат, то достаточно найти объем, образованный вращением вокруг оси OX площади OAB, равной одной четверти площади эллипса (рис. 156), и полученный результат удвоить.

---

[1]) Иными словами, dV_x есть главная линейная часть приращения переменного объема V_x при перемещении сечения $S(x)$ на бесконечно малую величину dx.

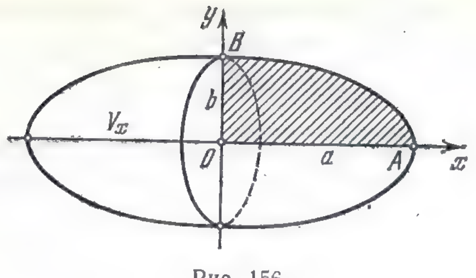


Рис. 156

Обозначим объем тела вращения через V_x; тогда на основании формулы (1) имеем

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a y^2 \, dx,$$

где 0 и a — абсциссы точек B и A. Из уравнения эллипса находим $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Отсюда

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a x^2 \, dx =$$

$$= \pi b^2 \cdot x \Big|_0^a - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \pi a b^2 - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$V_x = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Аналогично, при вращении эллипса (3) вокруг малой оси b объем соответствующего тела вращения равен

$$V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Полагая $a = b$, получим объем шара радиуса a:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

§ 7. Работа переменной силы

З а д а ч а. Найти работу A непрерывной переменной силы $F(x)$, приложенной к материальной точке M, при перемещении последней вдоль оси Ox из положения $x = a$ в положение $x = b$, предполагая, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

Пусть точка M переместилась из положения x в положение $x+dx$ (рис. 157). На бесконечно малом промежутке $[x, x+dx]$ длины dx силу $F(x)$ приближенно

Рис. 157

можно считать постоянной. Поэтому *элементарная работа силы* равна

$$dA = F(x)\,dx. \quad (1)$$

Интегрируя выражение (20) в пределах от $x=a$ до $x=b$, получим всю работу

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \quad (2)$$

Пример. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 5 см, если сила 100 Н растягивает пружину на 1 см?

Согласно закону Гука упругая сила F, действующая на пружину, возрастает пропорционально растяжению x пружины, т. е.

$$F = kx.$$

Здесь перемещение x выражено в метрах, а сила F — в ньютонах. Для определения коэффициента пропорциональности k согласно условию задачи полагаем $F = 100$ Н при $x = 0{,}01$ м. Отсюда $100 = k\cdot 0{,}01$, т. е. $k = 10000$ и, следовательно, $F = 10000\,x$. Искомая работа на основании формулы (2) равна

$$A = \int_0^{0{,}05} 10000x\,dx = 5000x^2 \Big|_0^{0{,}05} = 12{,}5 \text{ Дж}.$$

§ 8. Другие физические приложения определенного интеграла

Для иллюстрации основных методов в теории определенного интеграла: 1) метода дифференциала и 2) метода интегральных сумм — рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Концентрация вещества (г/м³) в воде меняется по закону

$$C = \frac{10x}{x+1} \quad (1)$$

(x — глубина слоя).

Сколько вещества Q содержится в вертикальном столбе воды, площадь поперечного сечения которого равна $S = 1$ м², а глубина меняется от 0 м до 200 м?

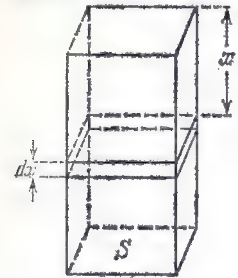


Рис. 158

Рассмотрим бесконечно тонкий слой столба воды с сечением S толщины dx, находящийся на глубине x (рис. 158).

Количество вещества, содержащегося в этом слое, равно

$$dQ = C \cdot S\,dx = \frac{10x}{x+1}\,dx. \tag{2}$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до 200, получим

$$Q = 10\int_0^{200} \frac{x\,dx}{x+1} = 10\int_0^{200} \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx = 10\,[x - \ln(x+1)]\Big|_0^{200} =$$

$$= 10\,(200 - \ln 201) = 10\cdot(200 - 5{,}3) = 1947 \text{ г}.$$

Пример 2. С какой силой однородный стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ линейной плотности δ притягивает материальную точку $P(a)$ $(a > 1)$ массы m (рис. 159)?

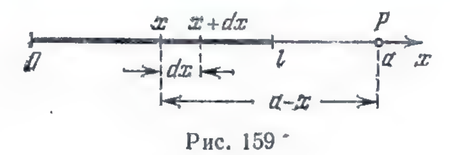


Рис. 159

Согласно закону Ньютона бесконечно малый элемент стержня $[x,\ x+dx]$ массы $\delta\,dx$ притягивает материальную точку P с силой, величина которой равна

$$dF = -k\,\frac{m\delta\,dx}{(a-x)^2}, \tag{3}$$

где k — коэффициент пропорциональности (гравитационная постоянная). Так как эти силы притяжения действуют в одном и том же направлении, то величины их dF можно алгебраически складывать, а следовательно, и интегрировать (так как интеграл — предел алгебраической суммы):

$$F = -km\delta\int_0^l \frac{dx}{(a-x)^2} = -km\delta\cdot\frac{1}{a-x}\Big|_0^l =$$

$$= -km\delta\left(\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{km\delta l}{a\,(a-l)}.$$

Пример 3. Определить величину силы давления воды на вертикальный круг радиуса R, центр которого погружен в воду на глубину H $(H > 2R)$.

В качестве оси Ox возьмем вертикальную прямую с началом координат O, совпадающим с центром круга (рис. 160). Данный круг разобьем на n узеньких горизонтальных полосок толщины соответственно Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим i-ю полоску $AA'B'B$, удаленную от центра круга на величину x_i и имеющую толщину Δx_i (рис. 160). Если Δx_i — малая величина, то эту полоску приближенно можно принять за прямоугольник, и поэтому ее площадь

$$\Delta S_i \approx AA' \cdot \Delta x_i = 2\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i.$$

Рис. 160

Считая, что уровень погружения этой полоски равен $H - x_i$, согласно закону Паскаля получим величину силы давления воды на эту полоску

$$\gamma (H - x_i)\,\Delta S_i = 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i,$$

где γ — удельный вес воды.

Суммируя эти выражения, получим приближенное значение величины силы давления P воды на всю пластинку

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i. \tag{4}$$

Формула (4) тем точнее, чем меньше Δx_i. В пределе при $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$ получим точную формулу для величины силы давления воды

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i. \tag{5}$$

Сумма (4) является интегральной для функции

$$f(x) = 2\gamma (H - x)\sqrt{R^2 - x^2};$$

поэтому ее предел есть соответствующий определенный интеграл. Следовательно, из (5) находим

$$P=2\gamma\int_{-R}^{R}(H-x)\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\pi\gamma R^2H.$$

Упражнения

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1. Параболами $y=x^2$, $y^2=x$.
2. Гиперболой $xy=a^2$ и прямыми $y=0$, $x=b$, $x=2b$ $(b>0)$.
3. Параболой $y=2x-x^2$ и осью Ox.
4. Кривой Аньези $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ и осью Ox.
5. Кривой $y=e^x$ и прямыми $x=0$ и $y=e$.
6. Параболой $y=2(x-1)(3-x)$ и осью Ox.
7. Параболой $y^2=2(x-1)$ и прямой $x=3$.
8. Кривой $y=2^x$ и прямыми $y=2$ и $x=0$.
9. Параболами $y=1-x^2$ и $y=x^2-7$.

9.1. Найти площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

10. Найти длину дуги отрезка полукубической параболы $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ от точки $x_1=0$ до точки $x_2=8$.

11. Найти длину дуги отрезка кривой $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x$ от точки $x_1=1$ до точки $x_2=e$.

11.1. Найти длину дуги одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

12. Построить лемнискату $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ и найти площадь всей области, ограниченной этой линией.

13. Построить «трехлепестковую розу» $\rho=a\sin 3\varphi$ и найти площадь области, ограниченной этой линией.

14. Вычислить длину дуги логарифмической спирали

$$\rho=ae^{m\varphi}\quad (a>0,\ m>0),$$

находящейся внутри круга $\rho=a$.

15. Построить кривую $\rho=2a\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ и найти длину ее дуги.

16. Найти объем обелиска, основаниями которого служат прямоугольники со сторонами A, B и a, b, а высота равна h.

17. С помощью интегрирования найти объем шара радиуса R.

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной следующими линиями:

18. $y=2x-x^2$, $y=0$.
19. Одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и $y=0$.
20. $y=\sec x$, $y=0$, $x=\pm\pi/4$.
21. $y=x^2$, $y=2x$.

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной следующими линиями:

22. $y=h\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, $y=h$ (параболоид вращения).

23. $y=e^{-x}$, $y=0$ и $x=0$.

24. Скорость точки в зависимости от времени t меняется по закону

$$v=0{,}01t^3 \text{ [м/с]}.$$

Какой путь пройдет точка за 10 с? Чему равна средняя скорость движения?

25. Удельная теплоемкость вещества при температуре t равна $c=0{,}2+0{,}001t\left[\frac{\text{Дж}}{\text{г °C}}\right]$. Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы нагреть 1 г вещества от 0 °С до 100 °С?

26. Линейная плотность стержня $0\leqslant x\leqslant l$ длины l равна $q=q_0\sin\frac{\pi x}{l}$, где q_0 — постоянная. Найти массу стержня.

27. Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 100 Н/см². Какую работу надо совершить, чтобы при неизменной температуре уменьшить объем пара в два раза?

28. Найти силу давления воды на вертикальный полукруглый щит радиуса a, диаметр которого находится на поверхности воды.

ГЛАВА XVI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Арифметические операции над комплексными числами

Как известно, под *комплексным числом* понимается выражение вида

$$z = x + iy \equiv x + yi, \tag{1}$$

где x и y — действительные числа, а i — мнимая единица.

Числа вида $x + i0 = x$ отождествляются с действительными числами; в частности, $0 + i0 = 0$. Числа вида $0 + iy = iy$ называются *чисто мнимыми*.

Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* числа z и обозначаются следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{2}$$

Под *модулем* комплексного числа z понимается неотрицательное число

$$|z| = |(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0. \tag{3}$$

Сопряженным числом $\bar{z}$ к числу (1) называется комплексное число

$$\bar{z} = x + i(-y) \equiv x - iy. \tag{4}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{5}$$

и

$$|\bar{z}| = |z|. \tag{6}$$

На множестве комплексных чисел следующим образом определено отношение равенства двух чисел, а также операции сложения, вычитания, умножения и деления.

I. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

В частности, $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0, \ \operatorname{Im} z = 0$.

II. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2.$$

III. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Отсюда, в частности, получаем важное соотношение

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1. \qquad (7)$$

Заметим, что правило умножения III получается формально путем умножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ с учетом (7).

Очевидно также, что для $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ имеем:

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

IV. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$.

Легко проверить следующие свойства:

1) $\overline{(\bar{z})} = z$; 2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; 3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$; 5) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

§ 2. Комплексная плоскость

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат Oxy. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ может быть поставлена в соответствие точка плоскости $z(x, y)$ (рис. 161), причем это соответствие взаимно однозначно. Плоскость, на которой реализовано такое соответствие, называют *комплексной плоскостью*, и вместо комплексных чисел говорят о точках комплексной плоскости.

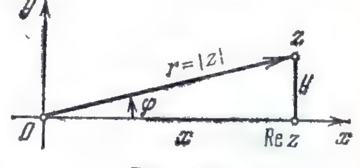


Рис. 161

На оси Ox расположены действительные числа: $z = x + 0i = x$; поэтому она называется *действительной осью*. На оси Oy расположены чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$; она носит название *мнимой оси*.

Заметим, что $r = |z|$ представляет собой расстояние точки z от начала координат.

С каждой точкой z связан радиус-вектор этой точки $\overrightarrow{Oz}$; угол, образованный радиусом-вектором точки z

с осью Ox, называется *аргументом* $\varphi = \operatorname{Arg} z$ этой точки. Здесь $-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty$. Для нулевой точки $z=0$ аргумент произволен. Наименьшее по модулю значение $\operatorname{Arg} z$ называется *главным значением* его и обозначается через $\arg z$:

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi. \qquad (1)$$

Для аргумента φ имеем (рис. 161)

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (2)$$

Пример. 1) $\arg 2 = 0$; 2) $\arg(-1) = \pi$; 3) $\arg i = \pi/2$.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа z можно рассматривать (см. рис. 161) как полярные координаты точки z. Отсюда получаем

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (3)$$

Таким образом, имеем тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (4)$$

где $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Теорема 1. *При сложении комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (по правилу параллелограмма).*

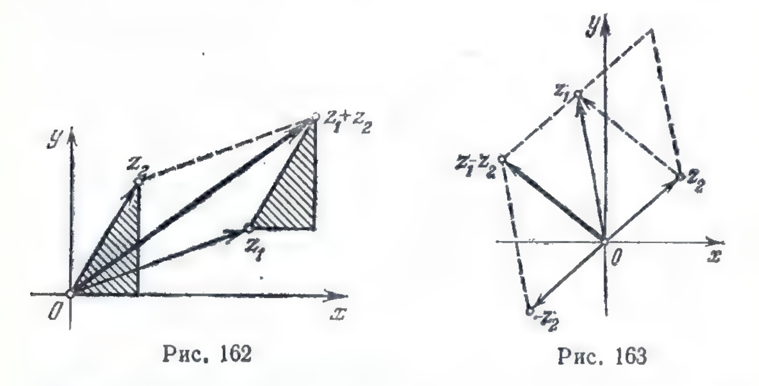


Рис. 162 Рис. 163

Действительно, если число $z_1 = x_1 + iy_1$ соответствует точке с координатами (x_1, y_1), а число $z_2 = x_2 + iy_2$ — точке с координатами (x_2, y_2), то числу $z_1 + z_2$ отвечает точка $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Так как (рис. 162) заштрихованные прямоугольные треугольники с катетами x_2 и y_2 равны между собой, то четырехугольник с вершинами 0, z_1,

z_1+z_2, z_2 есть параллелограмм. Следовательно, радиус-вектор точки z_1+z_2 является суммой радиусов-векторов точек z_1 и z_2 (ср. гл. XVIII, § 2).

Следствие. *Так как $|z|$ есть длина вектора $\overrightarrow{Oz}$, то*

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

Теорема 2. *При вычитании комплексных чисел их радиусы-векторы вычитаются.*

Так как $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$, то z_1-z_2 равен второй диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{Oz}$ и $\overrightarrow{Oz'}$ (рис. 163), т. е. равен разности радиусов-векторов точек z_1 и z_2 (ср. гл. XVIII, § 3).

Следствие. *Расстояние между двумя точками z и z' равно*

$$\rho(z', z)=|z'-z|.$$

§ 3. Теоремы о модуле и аргументе

Теорема 1. *Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.*

Действительно, если

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то имеем

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+ \\ +\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Отсюда

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\cdot|z_2|$$

и

$$\operatorname{Arg} z_1z_2=\varphi_1+\varphi_2=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2, \qquad (1)$$

где значения многозначной функции Arg, стоящие в левой и правой частях равенства (1), следует подбирать соответствующим образом. Это замечание надо иметь в виду и для дальнейшего.

Следствие. *Модуль целой положительной степени комплексного числа равен такой же степени модуля этого числа, а аргумент степени равен аргументу числа, умноженному на показатель степени*, т. е.

$$|z^n|=|z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n=n\operatorname{Arg} z$$

(n — целое положительное число).

Доказательство непосредственно вытекает из рассмотрения произведения равных сомножителей.

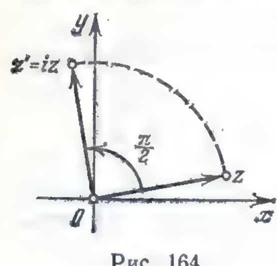


Рис. 164

Пример. Построить точку $z' = iz$. Имеем

$$|z'| = |i| \cdot |z| = |z|,$$

$$\operatorname{Arg} z' = \operatorname{Arg} iz = \arg i + \arg z = \frac{\pi}{2} + \arg z.$$

Следовательно, при умножении на i вектор $\overrightarrow{Oz}$ поворачивается на прямой угол против хода часовой стрелки (рис. 164).

Теорема 2. *Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \neq 0.$$

Так как

$$\overline{z_2} = r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = r_2 [\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)],$$

то на основании теоремы 1 имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)[\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)]}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (r_2 \neq 0).$$

Отсюда

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

§ 4. Извлечение корня из комплексного числа

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho (\cos \psi + i \sin \psi), \qquad (1)$$

где $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда на основании § 3 имеем

$$z = [\rho (\cos \psi + i \sin \psi)]^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi). \qquad (2)$$

Отсюда получаем

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (3)$$

Таким образом,

$$\rho=\sqrt[n]{r}=\sqrt[n]{|z|}$$

и

$$\psi=\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z}=\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\arg z+2k\pi}{n}.$$

Заметим, что здесь под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня.

Здесь в качестве числа k достаточно брать лишь значения $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, так как при всех прочих

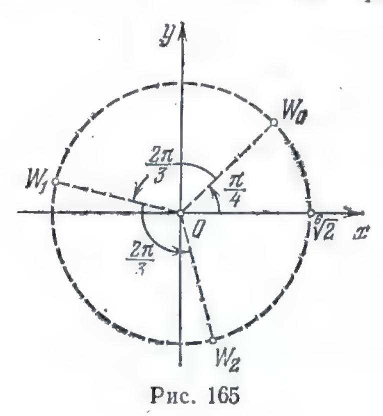


Рис. 165

значениях k получаются повторения уже найденных значений корня. Следовательно, окончательно имеем

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, n-1). \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что корень n-й степени из любого комплексного числа $z\neq 0$ имеет точно n значений.

Пример. Найти $W=\sqrt[3]{-1+i}$.

Так как $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, то на основании формулы (4) имеем

$$W=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)=$$
$$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k=0, 1, 2).$$

Отсюда

$$W_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$W_1=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right),$$

$$W_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

Точки W_0, W_1, W_2 представляют собой равноотстоящие друг от друга точки, расположенные на окружности радиса $\sqrt[6]{2}$ (рис. 165).

§ 5. Понятие функции комплексной переменной

Пусть даны две комплексные плоскости Oxy (плоскость z) и $O'uv$ (плоскость w).

Определение. *Если каждой точке $z\in E$ (E — множество точек плоскости z) по некоторому закону f ставится в соответствие единственная точка $w\in E'$ (E' — множество точек плоскости w), то говорят, что w есть **функция** от z (однозначная):*

$$w=f(z), \tag{1}$$

с областью определения E, значения которой принадлежат множеству E' (рис. 166). Если множество значений

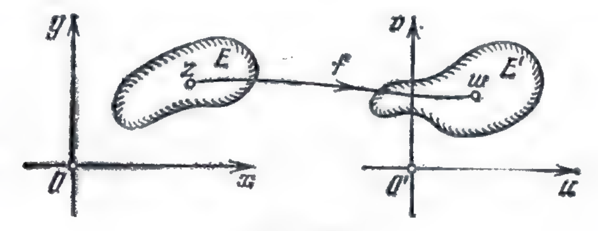


Рис. 166

функции $f(z)$ исчерпывает все множество E', то E' называется *множеством значений* (*областью изменения*) функции $f(z)$. В этом случае пишут

$$E'=f(E). \tag{2}$$

Множества E и E' можно изображать на одной комплексной плоскости.

Таким образом, **каждая комплексная функция реализует однозначное в одну сторону отображение одного множества на другое.** Благодаря этому комплексные функции находят свое применение в таких науках, как гидродинамика и аэродинамика, так как с их помощью удобно описывать «историю» движения объема жидкости (или газа).

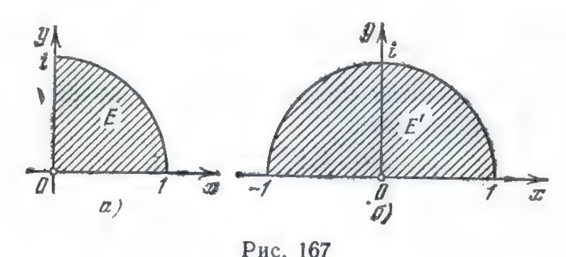


Рис. 167

Раздел математики, изучающий свойства комплексных функций, носит название *теории функций комплексной переменной*.

Пример. Во что переходит сектор E

$$0 < \arg z < \pi/2, \quad 0 < |z| < 1$$

(рис. 167, *а*) при отображении $w = z^2$?

Имеем

$$\arg w = 2 \arg z < \pi \text{ и } |w| = |z|^2 < 1.$$

Поэтому отображенная область E' представляет собой полукруг (рис. 167, *б*).

Упражнения

1. Найти $z = (1+i)^{100}/(\sqrt{3} - i)^{50}$.
2. Построить области:
а) $0 < \operatorname{Re} z < 1$; б) $\operatorname{Im} z > 2$; в) $0 < \arg z < \pi/4$; г) $|z| < 1$.
3. Во что переходит квадрат плоскости z с вершинами 0, 1, $1+i$, i при отображении $w = z^2$?

ГЛАВА XVII

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

§ 1. Определители второго порядка

Под *определителем* (*детерминантом*) второго порядка понимается выражение

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{1}$$

(см. также гл. I, § 5).

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются *элементами* определителя; они расположены в двух строках и в двух столбцах (*ряды определителя*). В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что все рассматриваемые величины действительны.

Формула (1) дает правило «развертывания» определителя второго порядка, а именно: *определитель второго порядка равен разности произведений его элементов первой и второй диагоналей.*

С помощью определителей второго порядка удобно решать линейные системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Такую линейную систему, в которой свободные члены находятся в правых частях, для определенности мы будем называть *стандартной*.

Под *решением* системы (2) понимается всякая пара чисел (x, y), обращающая эту систему в тождество. Если существует только одна такая пара, то решение называется единственным. Аналогично вводится понятие решения для системы, содержащей n неизвестных ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Для нахождения решений системы (2) применим метод исключения. Умножая первое уравнение системы

(2) на b_2, а второе — на $-b_1$ и складывая, будем иметь

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1. \qquad (3)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы (2) на $-a_2$, а второе — на a_1 и складывая, получим

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1. \qquad (4)$$

Введем *определитель системы*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что дополнительные определители D_x и D_y получаются из определителя системы D путем замены коэффициентов при указанном неизвестном на соответствующие свободные члены.

Уравнения (3) и (4) принимают вид

$$Dx=D_x, \quad Dy=D_y. \qquad (5)$$

Если $D\neq 0$, то отсюда получаем, что система (2) имеет единственное решение

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D} \qquad (6)$$

(*формулы Крамера*) [1]).

Замечание. Если определитель $D=0$, то система (2) или не имеет решений (т. е. несовместна) или имеет бесконечно много решений (т. е. система неопределенная).

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 7x-6y&=5, \\ 8x-7y&=-10. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Имеем

$$D=\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}=-49+48=-1,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix}=-35-60=-95,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix}=-70-40=-110.$$

[1]) Фактически мы доказали, что если решение системы (2) существует, то оно выражается формулами (6). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при $D\neq 0$ формулы (6) дают решение системы (2).

Отсюда на основании формул Крамера (6) получаем

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-95}{-1}=95,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-110}{-1}=110.$$

Геометрически решение (95; 110) представляет собой точку пересечения прямых (7).

§ 2. Система двух однородных уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим однородную систему

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эта система всегда совместна, так как, очевидно, имеет нулевое решение $x=0$, $y=0$, $z=0$. Однако интересно найти ненулевые решения (x, y, z) системы (1). Пусть, например, $z\neq 0$.

Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{x}{z}+b_1\frac{y}{z}=-c_1,\\ a_2\frac{x}{z}+b_2\frac{y}{z}=-c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Отсюда, предполагая, что $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, получаем

$$\frac{x}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \qquad (3)$$

$$\frac{y}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение *матрицу коэффициентов* системы (1)

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Определители второго порядка D_1, D_2 и D_3, которые получаются из матрицы (5) путем вычеркивания соответствующего столбца, называются ее *минорами*. Таким образом, имеем

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=D.$$

Используя эти обозначения, уравнения (3) и (4) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x}{z}=\frac{D_1}{D_3},\quad \frac{y}{z}=-\frac{D_2}{D_3}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{x}{D_1}=\frac{y}{-D_2}=\frac{z}{D_3}. \qquad (6)$$

Равенства (6), очевидно, справедливы также и для нулевого решения.

Таким образом, имеем следующее правило: *неизвестные однородной системы* (1) *пропорциональны соответствующим минорам ее матрицы коэффициентов, взятым с надлежащими знаками.*

Обозначая через t коэффициент пропорциональности для отношений (6), получим полную систему решений системы (1):

$$x=D_1t,\ y=-D_2t,\ z=D_3t\ (-\infty<t<+\infty). \qquad (7)$$

При выводе формул (7) мы предполагали, что $D=D_3\neq 0$. Однако, как легко убедиться, формулы (7) будут справедливы, если любой (хотя бы один) из миноров D_1, D_2, D_3 отличен от нуля.

Замечание. Если все миноры D_1, D_2 и D_3 равны нулю, то система (1) требует особого рассмотрения.

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z=0,\\ 4x+5y-6z=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Составляя матрицу коэффициентов

$$\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{matrix}\right\|,$$

находим ее миноры

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=12-15=-3,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=-6-12=-18,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=5+8=13.$$

На основании формулы (7) полная система решений системы (8) имеет вид

$$x=-3t,\ y=+18t,\ z=13t,$$

где $-\infty<t<+\infty$.

Простейшее ненулевое решение системы (1), получающееся при $t=1$, есть $x=-3$, $y=18$, $z=13$.

§ 3. Определители третьего порядка

Определение 1. *Под определителем (детерминантом) третьего порядка понимается выражение*

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Числа a_i, b_i, c_i $(i=1, 2, 3)$ называются *элементами определителя*; они расположены в трех строках и трех столбцах его (*ряды определителя*).

Раскрывая определители второго порядка (миноры) в формуле (1) и собирая члены с одинаковыми знаками, получим, что определитель третьего порядка представляет собой знакопеременную сумму шести слагаемых:

$$D=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1, \qquad (2)$$

из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус.

Пример. Вычислить

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Используя формулу (1), имеем

$$D=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}= 1\cdot(-1)-2\cdot(-2)+3\cdot(-1)=0.$$

В дальнейшем мы укажем более удобные способы вычисления определителей третьего порядка.

Определение 2. *Под минором элемента определителя третьего порядка понимается определитель младшего (второго) порядка, получающийся из данного определителя в результате вычеркивания строки и столбца, содержащих данный элемент.*

Например, для определителя (3) минором его элемента 2, стоящего во второй строке и в первом столбце, является определитель

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-2.$$

В дальнейшем для краткости будем говорить, что элемент определителя третьего порядка занимает *четное место*, если сумма номеров его строки и его столбца есть число четное, и *нечетное место*, если эта сумма есть число нечетное.

Определение 3. *Алгебраическим дополнением (минором со знаком) элемента определителя третьего порядка называется минор этого элемента, взятый со знаком плюс, если элемент занимает четное место, и со знаком минус, если его место нечетное.*

Таким образом, если M есть минор элемента определителя, а i и j — соответственно номер строки и номер

столбца, на пересечении которых находится данный элемент, то его алгебраическое дополнение есть

$$A=(-1)^{i+j}M.$$

Например, для элемента c_2 определителя (1), находящегося во второй строке и в третьем столбце, его алгебраическое дополнение есть

$$C_2=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Соответствующие знаки, приписываемые при этом минорам элементов определителя, можно задать таблицей

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

В дальнейшем алгебраические дополнения элементов определителя с буквенными элементами условимся обозначать соответствующими прописными (большими) буквами.

Теорема разложения. *Определитель третьего порядка равен сумме парных произведений элементов какого-либо ряда его на их алгебраические дополнения* (под рядом понимается строка или столбец).

Таким образом, для определителя (1) справедливы шесть разложений:

$$\left.\begin{aligned} D&=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1,\\ D&=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2,\\ D&=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

и

$$\left.\begin{aligned} D&=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,\\ D&=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3,\\ D&=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Легко проверить, что формулы (4) и (5) дают одно и то же выражение (2), принятое за определение.

Замечание. С помощью формул типа (4) или (5), по индукции, можно ввести определители высших порядков.

§ 4. Основные свойства определителей

При формулировках мы не будем указывать порядок определителя, так как эти свойства справедливы для определителей любого порядка.

I. (Равноправность строк и столбцов.) *Определитель не меняет своего значения при замене всех его строк соответствующими столбцами*, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Действительно, разлагая первый определитель по элементам первой строки, а второй — по элементам первого столбца, в силу теоремы разложения (§ 3) мы получим один и тот же результат.

II. *При перестановке двух параллельных рядов определителя его модуль сохраняет прежнее значение, а знак меняется на обратный.*

Пусть, например, в определителе

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

переставлены первая и вторая строки; тогда получим определитель

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2')$$

Разлагая определитель $\tilde{D}$ по элементам второй строки и учитывая, что при перестановке строк изменилась четность мест этих элементов, будем иметь

$$\tilde{D} = a_1(-A_1) + b_1(-B_1) + c_1(-C_1) = -D.$$

Аналогичное положение получается и в других случаях.

Следствие 1. *Определитель, у которого два параллельных ряда одинаковы, равен нулю.*

В самом деле, пусть, например,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Переставляя первую и вторую строки определителя, в силу теоремы получим определитель $-D$. Но очевидно, эта операция не изменяет определитель D; поэтому $-D = D$ и, следовательно, $D = 0$.

Следствие 2. *Сумма парных произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда*

равна нулю, т. е. для определителя (2) имеем

$$\left.\begin{array}{l} a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0, \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

и т. д., а также

$$\left.\begin{array}{l} a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0, \\ a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

и т. д. (всего таких соотношений можно написать двенадцать).

Левые части всех соотношений (3) и (4) представляют собой разложения соответствующих определителей третьего порядка, содержащих два одинаковых параллельных ряда и, следовательно, равны нулю. Например,

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

(здесь разложение нужно производить во второй строке!).

III. *Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя*, т. е.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и т. п.

Это свойство непосредственно вытекает из разложения определителя по элементам соответствующего ряда.

Следствие 1. *Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.*

Следствие 2. *Если элементы какого-либо ряда определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда его, то определитель равен нулю.*

Например, имеем

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

и т. п.

IV. *Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.*

Например, имеем

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1+\alpha_1) A_1 + (b_1+\beta_1) B_1 + (c_1+\gamma_1) C_1 =$$

$$= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и т. п.

Следствие. *Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда его прибавить* (*или отнять*) *числа, пропорциональные соответствующим элементам параллельного ряда с одним и тем же коэффициентом пропорциональности* (так называемые «элементарные преобразования определителя»).

Действительно, пусть

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим, например, определители

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 \pm ka_2 & b_1 \pm kb_2 & c_1 \pm kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Используя свойства IV и III, будем иметь

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D \pm k\cdot 0 = D.$$

Элементарные преобразования дают удобный способ вычисления определителей.

Пример. Вычислить симметричный определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из второй строки удвоенную первую строку, а из третьей строки утроенную первую строку, получим

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8.$$

§ 5. Система трех линейных уравнений

Рассмотрим стандартную линейную систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

свободные члены которых находятся в правых частях. Под *решением* системы понимается всякая тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая этой системе.

Введем *определитель системы*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

(а также *дополнительные определители*

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Последовательно умножая уравнения системы (1) на алгебраические дополнения A_1, A_2, A_3 соответствующих элементов a_1, a_2, a_3 первого столбца определителя D, получим

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)\,x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)\,y+\\ +(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)\,z=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3. \tag{4}$$

Отсюда, применяя теорему разложения (§ 3) и следствие 2 к свойству II, будем иметь $Dx+0\cdot y+0\cdot z=D_x$, т. е.

$$Dx=D_x. \tag{5}$$

Используя алгебраические дополнения элементов второго и третьего столбцов определителя D, аналогично находим

$$Dy=D_y,\quad Dz=D_z. \tag{5'}$$

Если определитель системы $D\neq 0$, то из уравнений (5) и (5′) получаем единственное решение системы (1):

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}\ ^{1)}. \tag{6}$$

---

[1]) Ср. подстрочное примечание на стр. 321.

Таким образом, имеем правило Крамера: *неизвестные стандартной линейной системы* (1) *с ненулевым определителем представляют собой дроби, знаменатель которых есть определитель системы, а числители равны соответствующим дополнительным определителям.*

Замечание. Если определитель системы $D=0$, то система (1) или несовместна или имеет бесконечно много решений.

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=1,\\ 2x+3y+z&=0,\\ 3x+y+2z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Имеем

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из второго столбца удвоенный первый столбец, а из третьего столбца утроенный первый столбец, получим

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -5\\ 3 & -5 & -7 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5\\ -5 & -7 \end{vmatrix}=7-25=-18\neq 0.$$

Для дополнительных определителей находим следующие значения:

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7.$$

Используя правило Крамера, получаем решение системы:

$$x=-5/18,\quad y=1/18,\quad z=7/18.$$

§ 6. Однородная система трех линейных уравнений

Рассмотрим линейную систему

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=0, \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

свободные члены которой равны нулю. Такая линейная система называется *однородной.*

Однородная линейная система (1), очевидно, допускает нулевое решение $x=0$, $y=0$, $z=0$ и, следовательно, всегда совместна.

Интересно выяснить случаи, когда однородная система имеет ненулевые решения.

Теорема. *Линейная однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю*, т. е.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть система (1) имеет ненулевое решение (x_1, y_1, z_1). Если определитель ее $D\neq 0$, то на основании формул Крамера система (1) обладает только нулевым решением, что противоречит предположению. Следовательно, $D=0$.

Пусть $D=0$. Тогда линейная система (1) либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Но наша система совместна, так как имеется нулевое решение. Следовательно, система (1) допускает бесконечно много решений, в том числе и ненулевые.

Замечание. Укажем способ нахождения ненулевых решений однородной системы (1) в типичном случае.

Пусть определитель системы $D=0$, но не все его миноры второго порядка равны нулю.

Мы будем предполагать, что

$$C_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (3)$$

(этого всегда можно добиться с помощью перестановки уравнений и изменения нумерации неизвестных).

Рассмотрим подсистему, состоящую из двух первых уравнений системы (1):

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

В силу § 2 решения этой системы имеют вид

$$x=A_3t,\quad y=B_3t,\quad z=C_3t \qquad (5)$$

$(-\infty < t < +\infty)$, где A_3, B_3, C_3 — соответствующие алгебраические дополнения. Подставляя эти числа в неиспользованное третье уравнение системы (1) и учитывая, что определитель $D=0$, получим

$$a_3x+b_3y+c_3z=(a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3)\,t=Dt\equiv 0.$$

Следовательно, формулы (5), где t произвольно, дают все решения полной системы (1).

Геометрически уравнения системы (1) представляют собой уравнения трех плоскостей в пространстве $Oxyz$ (см. гл. XIX, § 2). Если определитель $D \neq 0$, то эти плоскости пересекаются в единственной точке $O(0, 0, 0)$; если же определитель $D = 0$, но не все его миноры второго порядка равны нулю, то в нашем случае эти плоскости пересекаются по прямой линии (как «листы книги»). Без рассмотрения оставлен случай слияния трех плоскостей.

§ 7. Система линейных уравнений с многими неизвестными. Метод Гаусса

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,\,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,\,n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,\,n+1}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Здесь для коэффициентов системы введена двойная индексация: а именно, у коэффициента a_{ij} первый индекс i обозначает номер уравнения, а второй j — номер неизвестного. Для удобства выкладок свободные члены обозначены через $a_{i,\,n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Наиболее простой метод решения системы (1) — это **метод исключения**. Мы изложим его в форме **схемы Гаусса** (обычно называемой *методом Гаусса*).

Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$ — «**ведущий коэффициент**». Разделив все члены первого уравнения на a_{11}, будем иметь **приведенное** уравнение

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \alpha_{1,\,n+1}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1). \quad (3)$$

Рассмотрим i-е уравнение системы (1):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_{i,\,n+1}. \quad (4)$$

Для исключения x_1 из этого уравнения умножим приведенное уравнение (2) на a_{i1} и полученное уравнение вычтем из уравнения (4). Тогда будем иметь

$$a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = a_{i,\,n+1}^{(1)}, \quad (5)$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\alpha_{1j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n+1). \quad (6)$$

Таким образом, получаем укороченную систему

$$\left.\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,\,n+1}^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,\,n+1}^{(1)}, \end{array}\right\} \quad (7)$$

коэффициенты которой определяются по формулам (6).

Если ее **ведущий коэффициент** $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из системы (7) указанным выше приемом можно исключить неизвестное x_2, причем новые коэффициенты будут вычисляться по формулам типа (6) и

т. д. Эта часть вычислений называется **прямым ходом метода Гаусса**.

Для определения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассмотрим приведенные уравнения

$$\left.\begin{aligned} x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=\alpha_{1,\,n+1},\\ x_2+\ldots+\alpha_{2n}^{(1)}x_n&=\alpha_{2,\,n+1}^{(1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ x_n&=\alpha_{n,\,n+1}^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Отсюда последовательно находим неизвестные (**обратный ход**)

$$\left.\begin{aligned} x_n&=\alpha_{n,\,n+1}^{(n-1)},\\ x_{n-1}&=\alpha_{n-1,\,n+1}^{(n-2)}-\alpha_{n-1,\,n}^{(n-2)}x_n,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1&=\alpha_{1,\,n+1}-\alpha_{1n}x_n-\alpha_{1,\,n-1}x_{n-1}-\ldots-\alpha_{12}x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Заметим, что операции (9) выполняются без деления.

Если очередной ведущий коэффициент окажется равным нулю, то уравнения системы следует переставить надлежащим образом. Возможно, конечно, что система (1) несовместна. Тогда, естественно, метод Гаусса не допускает реализации.

Пример. Методом Гаусса решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3&=20,\\ 3x_1+4x_2-2x_3&=-11,\\ 4x_1+2x_3+3x_3&=9. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Составляем таблицу коэффициентов системы (10), рассматривая свободные члены ее как коэффициенты при $x^0=1$:

x_1	x_2	x_3	x^0	Σ	
2	−3	4	20	23	I
3	4	−2	−11	−6	
4	2	3	9	18	
1	−1,5	2	10	11,5	
	8,5	−8	−41	−40,5	II
	8	−5	−31	−28	
	1	−0,625	−3,875	−3,5	
		−2,6875	−8,0625	−10,75	III
		1	3	4	
		1	3	4	IV
	1		−2	−1	
1			1	2	

Последний столбец Σ содержит суммы элементов соответствующих строк таблицы; этот столбец служит для контроля вычислений.

Считая отмеченный коэффициент 2 ведущим и деля на этот коэффициент все элементы первой строки таблицы (включая и входящий в столбец Σ), получаем коэффициенты первого приведенного уравнения (см. таблицу). Текущий контроль вычислений осуществляется тем, что элемент из столбца Σ равен сумме всех остальных элементов этой строки. Этим заканчивается заполнение раздела I таблицы.

Далее, используя формулу (6), подсчитываем коэффициенты укороченной системы, не содержащей неизвестного x_1. Для наглядности будем называть строку, содержащую коэффициенты приведенного уравнения, приведенной, а столбец, содержащий ведущий элемент раздела, ведущим. Тогда на основании формулы (6) справедливо правило: *преобразованные коэффициенты схемы Гаусса равны ее прежним коэффициентам минус произведение «проекций» их на соответствующие приведенную строку и ведущий столбец таблицы*. Пользуясь этим, заполняем раздел II таблицы, включая контрольный столбец. Для удобства вычислений в качестве ведущего коэффициента раздела II берем элемент 8 (см. таблицу).

Аналогично производится заполнение раздела III таблицы. Этим заканчивается прямой ход схемы Гаусса.

Неизвестные x_3, x_2 и x_1 последовательно определяются из приведенных уравнений

$$x_3 = 3,$$
$$x_2 - 0{,}625x_3 = -3{,}875,$$
$$x_1 - 1{,}5x_2 + 2x_3 = 10.$$

Отсюда

$$x_3 = 3,$$
$$x_2 = -3{,}875 + 0{,}625\cdot 3 = -2,$$
$$x_1 = 10 - 2\cdot 3 + 1{,}5\cdot(-2) = 1$$

(обратный ход). Результаты обратного хода помещены в разделе IV таблицы.

Заметим, что если в качестве свободных членов взять элементы столбца Σ, то для неизвестных получатся значения $\hat{x}_3 = 4$, $\hat{x}_2 = -1$, $\hat{x}_1 = 2$, превышающие на единицу значения неизвестных x_3, x_2, x_1. Этим обеспечивается заключительный контроль вычислений.

Упражнения

1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. С помощью определителей решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + 0{,}9y &= 1, \\ 1{,}1x + y &= -2. \end{aligned}\right\}$$

3. Найти решения системы

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 2x + 2y &= \alpha \end{aligned}\right\}$$

(α — параметр).

4. Найти точку пересечения прямых линий

$$\left.\begin{aligned} 5x+\alpha y&=1,\\ x-5y&=-3 \end{aligned}\right\}$$

(α — параметр).

5. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x-3y+5z&=0,\\ 7x-9y-11z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Указать какое-нибудь целочисленное ненулевое решение этой системы.

6. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

7. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0.$$

8. С помощью определителей решить систему

$$\left.\begin{aligned} -x+3y+5z&=1,\\ 3x+y+3z&=2,\\ 5x+3y-z&=-3. \end{aligned}\right\}$$

9. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=0,\\ 2x-3y+4z&=0,\\ 3x-y+7z&=0. \end{aligned}\right\}$$

10. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} \alpha x&=0,\\ x+y&=0,\\ x+z&=0 \end{aligned}\right\}$$

(α — параметр).

11. Методом Гаусса решить систему

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=-10,\\ 2x_1+3x_2+4x_3-5x_4&=-8,\\ 3x_1+4x_2-5x_3-6x_4&=4,\\ 4x_1-5x_2-6x_3-7x_4&=24. \end{aligned}\right\}$$

ГЛАВА XVIII
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Скаляры и векторы

Величина, полностью характеризуемая своим числовым значением в выбранной системе единиц, называется *скалярной* или *скаляром*. Таковы, например, масса тела, объем его, температура среды и т. п. Скаляр определяется числом, положительным или отрицательным, или равным нулю.

Величина, кроме числового значения характеризуемая еще направлением, называется *векторной* или *вектором*. К числу их относятся сила, перемещение, скорость и т. п. Вектор определяется числом и направлением.

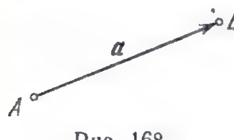


Рис. 168

Векторы обычно обозначают буквами жирного шрифта, например, $\mathbf{a}$. Геометрически вектор изображается направленным отрезком пространства (рис. 168); при этом используется обозначение $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, где точка A — начало отрезка, а точка B — конец его. В дальнейшем, для наглядности изложения, векторы мы будем рассматривать как направленные отрезки.

Под *модулем* (*длиной*) вектора $\mathbf{a}$

$$|\mathbf{a}|=a$$

понимается численное значение его, без учета направления. (Естественно, $|\overrightarrow{AB}|$ обозначает модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.) Вектор $\mathbf{0}$, модуль которого равен нулю, называется *нулевым* или *нуль-вектором* (направление нулевого вектора произвольно).

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считаются *равными*, если они расположены на параллельных или совпадающих прямых (параллельность в широком смысле) и имеют одинаковую длину и одинаково направлены. Мы условимся не разли-

чать равные векторы и, таким образом, приходим к понятию *свободного вектора*. Иными словами, свободный вектор допускает перенос его в любую точку пространства, при условии сохранения длины и направления. В частности, для свободных векторов можно обеспечить общую начальную точку их. В дальнейшем мы будем излагать теорию свободных векторов в трехмерном пространстве.

§ 2. Сумма векторов

Определение. *Суммой нескольких векторов*, например, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (рис. 169), *называется вектор*

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d},$$

по величине и направлению равный замыкающей $\overrightarrow{OM}$ *пространственной ломаной линии, построенной на данных векторах.*

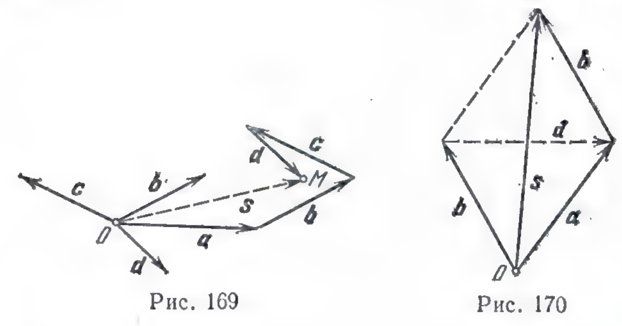


Рис. 169

Рис. 170

Для случая двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 170) их суммой $\boldsymbol{s}$ является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки приложения их (*правило параллелограмма*).

Так как в треугольнике длина одной стороны не превышает суммы длин двух других сторон, то из рис. 170 имеем

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

т. е. *модуль суммы двух векторов не превышает суммы модулей этих векторов.*

Для случая трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (рис. 171) их суммой $\boldsymbol{s}$ является диагональ $\overrightarrow{OM}$ параллелепипеда, построенного на этих векторах (*правило параллелепипеда*).

Легко проверить, что для векторного сложения справедливы следующие свойства:

1) *переместительное свойство*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

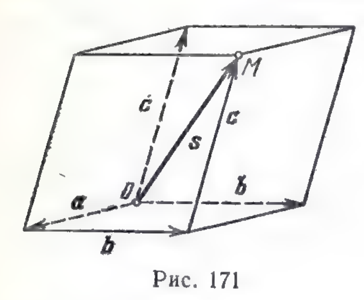


Рис. 171

т. е. *векторная сумма не зависит от порядка слагаемых;*

2) *сочетательное свойство*

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$$
$$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

т. е. *сумма трех (и большего числа) векторов не зависит от порядка расстановки скобок.*

Для каждого вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ (рис. 172) существует противоположный вектор $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA'}$, имеющий ту же длину,

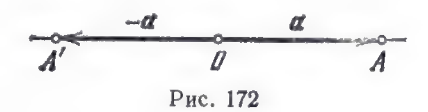


Рис. 172

но противоположное направление. По правилу параллелограмма, очевидно, имеем

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{0}$ — нуль-вектор.

Легко проверить, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

§ 3. Разность векторов

Под *разностью векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 173) понимается вектор

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

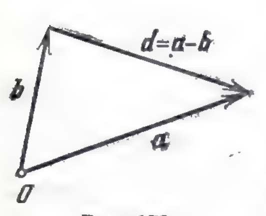


Рис. 173

такой, что

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}. \qquad (1)$$

Отметим, что в параллелограмме, построенном на данных векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 170), их разностью является соответственно направленная вторая диагональ параллелограмма.

Легко проверить, что справедливо следующее правило вычитания:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

§ 4. Умножение вектора на скаляр

Определение. *Произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на скаляр* k (рис. 174) *называется вектор*

$$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{a}k,$$

имеющий длину $b=|k|a$, *направление которого:* 1) *совпадает с направлением вектора* $\boldsymbol{a}$, *если* $k>0$; 2) *противоположно ему, если* $k<0$; 3) *произвольно, если* $k=0$.

ka (k<0) a ka (k>0)
0

Рис. 174

Нетрудно убедиться, что эта векторная операция обладает следующими свойствами:

1) $$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a},$$
$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b};$$

2) $$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a};$$

3) $$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},\quad 0\cdot\boldsymbol{a}=0$$

(k, l — скаляры).

Пример. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$.

Если ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ разделить на его длину $a=|\boldsymbol{a}|$ (т. е. умножить на скаляр $1/a$), то мы получим единичный вектор $\boldsymbol{e}$, так называемый *орт*, того же направления: $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}/a$. Отсюда имеем стандартную формулу вектора

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}. \qquad (1)$$

Формула (1) формально справедлива также и для нулевого вектора $\boldsymbol{a}=0$, где $a=0$ и $\boldsymbol{e}$ — произвольный орт.

§ 5. Коллинеарные векторы

Определение. *Два вектора* $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ *и* $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{O'B}$ (рис. 175) *называются коллинеарными, если они параллельны в широком смысле (т. е. расположены или на параллельных прямых, или же на одной и той же прямой).*

Так как направление нулевого вектора произвольно, то можно считать, что **нулевой вектор коллинеарен любому вектору**.

Теорема. *Два ненулевых вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны*, т. е.

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \tag{1}$$

(k — скаляр).

Доказательство. 1) Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$) коллинеарны и $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ — их орты.

Имеем

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e} \text{ и } \boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}'. \tag{2}$$

Очевидно,

$$\boldsymbol{e}' = \pm\boldsymbol{e}, \tag{3}$$

где знак плюс соответствует векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинакового направления, а знак минус — векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ противоположного направления.

Рис. 175

Из формул (2) и (3) получаем

$$\boldsymbol{b} = \pm b\boldsymbol{e} = \pm\frac{b}{a}\cdot(a\boldsymbol{e}) = \pm\frac{b}{a}\boldsymbol{a}.$$

Отсюда вытекает формула (1), где $k = \pm b/a$.

2) Если выполнено равенство (1), то коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ непосредственно следует из смысла умножения векторов на скаляр (§ 4).

§ 6. Компланарные векторы

Определение. *Три вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *называются* ***компланарными***, *если они параллельны некоторой плоскости в широком смысле (т. е. или параллельны плоскости, или лежат в ней).*

Можно сказать также, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда после приведения их к общему началу они **лежат в одной плоскости**.

По смыслу определения тройка векторов, среди которых имеется хотя бы один нулевой, компланарна.

Теорема. *Три ненулевых вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *компланарны тогда и только тогда, когда один из них является*

линейной комбинацией других, т. е., например,

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \qquad (1)$$

(k, l — скаляры).

Доказательство. 1) Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, расположены в плоскости P (рис. 176) и имеют общую точку приложения O.

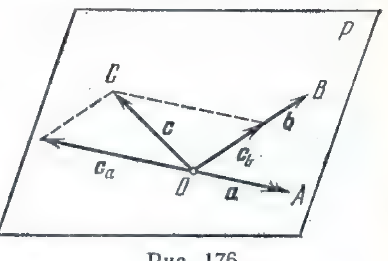


Рис. 176

Предположим сначала, что эти векторы не все попарно коллинеарны, например, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Тогда, производя разложение вектора $\boldsymbol{c}$ в сумму векторов $\boldsymbol{c}_a$ и $\boldsymbol{c}_b$, коллинеарных, соответственно векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, в силу § 5 будем иметь

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_a + \boldsymbol{c}_b = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}, \qquad (2)$$

где k и l — соответствующие скаляры.

Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ попарно коллинеарны, то можно написать

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b}, \qquad (3)$$

и таким образом, снова выполнено условие (1).

2) Обратно, если для векторов $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 176) выполнено условие (1), то на основании смысла соответствующих векторных операций вектор $\boldsymbol{c}$ расположен в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. эти векторы компланарны.

Пример. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ компланарны, так как

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

§ 7. Проекция вектора на ось

Осью называется направленная прямая. Направление прямой обычно обозначается стрелкой. Заданное направление оси будем считать положительным, противоположное — отрицательным.

Определение 1. *Проекцией точки A на ось l* (рис. 177) *называется основание A' перпендикуляра AA', опущенного из точки A на эту ось.*

Здесь под перпендикуляром AA' понимается прямая, пересекающая ось l и составляющая с ней прямой угол[1]). Таким образом, проекция A' есть пересечение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной оси l, с этой осью.

Определение 2. *Под компонентой (составляющей) вектора* $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ *относительно оси* l (рис. 177) *понимается вектор* $\boldsymbol{a}'=\overrightarrow{A'B'}$, *начало которого* A' *есть проекция на ось* l *начала* A *вектора* $\boldsymbol{a}$, *а конец которого* B' *есть проекция на ось* l *конца* B *этого вектора.*

Определение 3. *Под проекцией вектора* $\boldsymbol{a}$ *на ось* l *понимается скаляр* $a_l=\pm|\overrightarrow{A'B'}|$, *равный длине (модулю) его компоненты* $\boldsymbol{a}'$ *относительно оси* l, *взятой со знаком плюс, если направление компоненты совпадает с направлением оси* l, *и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси* l.



Рис. 177

Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, *то полагают* $a_l=0$.

Заметим, что если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси l, то для компоненты $\boldsymbol{a}'$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{a}'=a_l\boldsymbol{e}. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Проекция вектора* $\boldsymbol{a}$ *на ось* l *равна произведению длины* a *вектора на косинус угла между направлением вектора и направлением оси,* т. е.

$$a_l=a\cos\varphi, \quad \varphi=\angle(\boldsymbol{a}, l). \qquad (2)$$

Доказательство. Так как вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ свободный (рис. 178), то можно предположить, что начало его O лежит на оси l.

1) Если угол φ между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью l острый ($0\leqslant\varphi<\pi/2$), то направление компоненты $\boldsymbol{a}'=\overrightarrow{OA'}$ вектора $\boldsymbol{a}$ совпадает с направлением оси l (рис. 178, *а*). В этом случае имеем

$$a_l=\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}=+|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=a\cos\varphi.$$

[1]) Напомним, что все геометрические объекты мы здесь рассматриваем в трехмерном пространстве.

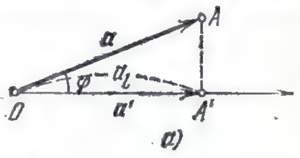
2) Если угол φ между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью l тупой ($\pi/2 < \varphi \leqslant \pi$) (рис. 178, *б*), то направление компоненты $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{OA'}$ вектора $\boldsymbol{a}$ противоположно направлению оси l. Тогда получаем

$$a_l = \text{пр}_l\, \boldsymbol{a} = -|\overrightarrow{OA'}| = -|\overrightarrow{OA}| \cos(\pi - \varphi) = a \cos\varphi.$$

3) Если же $\varphi = \pi/2$, то формула (2), очевидно, выполняется, так как при этом $a_l = 0$.

Таким образом, формула (2) доказана.

Следствие 1. *Проекция вектора на ось: 1) положительна, если вектор образует с осью острый угол; 2) отрицательна, если этот угол — тупой, и 3) равна нулю, если этот угол — прямой.*



Следствие 2. *Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.*

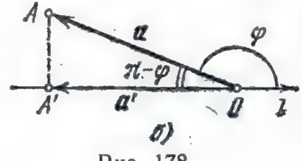


Рис. 178

Теорема 2. *Проекция суммы нескольких векторов на данную ось равна сумме их проекций на эту ось.*

Доказательство. Пусть, например, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, где (рис. 179) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BC}$ и, следовательно, $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{OC}$.

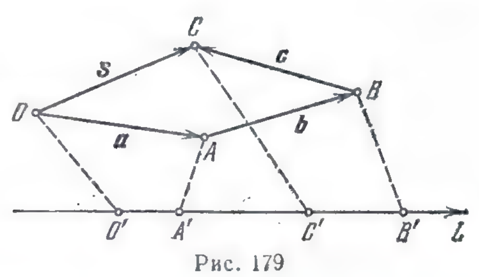


Рис. 179

Обозначая проекции точек O, A, B, C на ось l через O', A', B', C' и учитывая направления компонент (см. рис. 179), имеем

$$\text{пр}_l\, \boldsymbol{s} = +|\overrightarrow{O'C'}| = +|\overrightarrow{O'A'}| + |\overrightarrow{A'B'}| - |\overrightarrow{B'C'}| =$$
$$= \text{пр}_l\, \boldsymbol{a} + \text{пр}_l\, \boldsymbol{b} + \text{пр}_l\, \boldsymbol{c}, \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Проекция замкнутой векторной линии на любую ось равна нулю.*

Теорема 3. *При умножении вектора на скаляр его проекция на данную ось умножается на этот скаляр*, т. е.

$$\text{пр}_l(k\boldsymbol{a}) = k\,\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}. \quad (4)$$

Формула (4) следует из теоремы 1 и смысла умножения вектора на скаляр.

Следствие. *Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации проекций этих векторов*, т. е.

$$\text{пр}_l(k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}) = k_1\,\text{пр}_l\,\boldsymbol{a} + k_2\,\text{пр}_l\,\boldsymbol{b}.$$

§ 8. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Пусть (рис. 180) Ox, Oy, Oz — три взаимно перпендикулярные оси в трехмерном пространстве (*оси координат*), исходящие из общей точки O (*начало координат*) и образующие *правую тройку* (правая система координат), т. е. ориентированные по правилу правого буравчика. Иными словами, для наблюдателя, направленного по оси Oz, кратчайший поворот оси Ox к оси Oy происходит против хода часовой стрелки. Три взаимно перпендикулярные плоскости Oyz, Ozx и Oxy, проходящие через соответствующие оси, называются *координатными плоскостями*; они делят все пространство на восемь октантов.

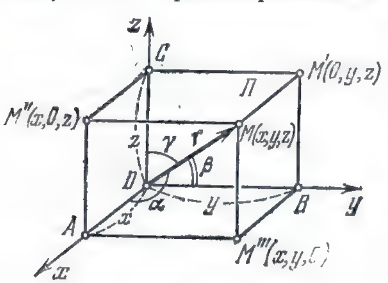


Рис. 180

Для каждой точки M пространства (рис. 180) существует ее *радиус-вектор* $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, начало которого есть начало координат O и конец которого есть данная точка M.

Определение. *Под декартовыми прямоугольными координатами x, y, z точки M понимаются проекции ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на соответствующие оси координат*, т. е.

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z. \quad (1)$$

В дальнейшем для краткости декартовы прямоугольные координаты мы будем называть просто п р я м о у г о л ь н ы м и к о о р д и н а т а м и.

Точка M с координатами x, y, z обозначается через $M(x, y, z)$, причем первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*, а третья — *аппликатой* точки M.

Для нахождения этих координат через точку M проведем три плоскости MA, MB, MC, перпендикулярные соответственно осям Ox, Oy, Oz (рис. 180). Тогда на этих осях получатся направленные отрезки

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z, \tag{2}$$

численно равные координатам точки M.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ является диагональю параллелепипеда П с измерениями $|x|$, $|y|$, $|z|$, образованного плоскостями MA, MB, MC и координатными плоскостями. Поэтому

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3}$$

Если обозначить через α, β, γ $(0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \pi)$ углы, образованные радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ с координатными осями, то будем иметь

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma. \tag{4}$$

Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$. Из (4), учитывая (3), получаем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \tag{5}$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов радиуса-вектора точки пространства равна* 1.

Из формулы (4) следует, что координата точки M п о л о ж и т е л ь н а, если радиус-вектор этой точки образует острый угол с соответствующей координатной осью, и о т р и ц а т е л ь н а, если этот угол тупой. В частности, в I октанте пространства, ребра которого составляют положительные полуоси координат, все координаты точек положительны. В остальных октантах пространства отрицательными координатами точек будут те, которые соответствуют отрицательно направленным ребрам октанта.

Измерения $|x|$, $|y|$, $|z|$ параллелепипеда П равны расстояниям точки M соответственно от координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy. Таким образом, *декартовы прямоугольные координаты точки M пространства представляют собой расстояния от этой точки до координатных плоскостей, взятые с надлежащими знаками.*

В частности, если точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости Oyz, то $x=0$; если — на плоскости Ozx, то $y=0$; если же — на плоскости Oxy, то $z=0$, и обратно.

§ 9. Длина и направление вектора

Пусть в пространстве $Oxyz$ задан вектор $\boldsymbol{a}$. Проекции этого вектора на оси координат

$$a_x = \text{пр}_x \boldsymbol{a}, \quad a_y = \text{пр}_y \boldsymbol{a}, \quad a_z = \text{пр}_z \boldsymbol{a} \tag{1}$$

называются *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$; при этом вектор мы будем записывать так: $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Так как вектор $\boldsymbol{a}$ свободный, то его можно рассматривать как радиус-вектор точки $M(a_x, a_y, a_z)$. Отсюда получаем длину вектора

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2}$$

т. е. *модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.*

Направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$ определяются из уравнений

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma, \tag{3}$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{4}$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице.* Направляющие косинусы ненулевого вектора однозначно определяют его направление. Следовательно, вектор полностью характеризуется своими координатами.

Пример. Найти длину и направление вектора $\boldsymbol{a} = \{1, 2, -2\}$. Имеем

$$a = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

и

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} = -\frac{2}{3}.$$

Отсюда

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70°30', \quad \beta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48°10',$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131°50'.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}$ образует острые углы с координатными осями Ox и Oy и тупой угол с координатной осью Oz.

§ 10. Расстояние между двумя точками пространства

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — начальная точка отрезка $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — конечная точка его. Точки M_1 и M_2 можно задать их радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\boldsymbol{r}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$ (рис. 181). Рассматривая вектор $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, из $\triangle OM_1M_2$ будем иметь

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1. \quad (1)$$

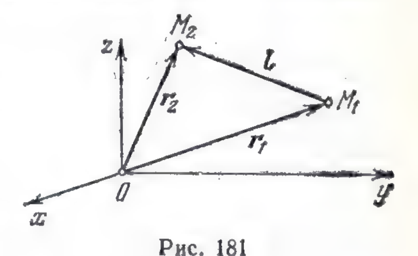


Рис. 181

Проектируя это векторное равенство на оси координат и учитывая свойства проекций, получим

$$l_x=x_2-x_1, \quad l_y=y_2-y_1, \quad l_z=z_2-z_1. \quad (2)$$

Таким образом, *проекции направленного отрезка на оси координат равны разностям соответствующих координат конца и начала отрезка.*

Из формул (2) получаем длину отрезка (или, иначе, расстояние между двумя точками M_1 и M_2)

$$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (3)$$

Итак, *расстояние между двумя точками пространства равно корню квадратному из квадратов разностей одноименных координат этих точек.*

Пример. Ракета из пункта $M_1(10, -20, 0)$ прямолинейно переместилась в пункт $M_2(-30, -50, 40)$ (расстояния даны в километрах). Найти путь l, пройденный ракетой.

На основании формулы (3) имеем

$$l=\sqrt{(-30-10)^2+(-50+20)^2+(40-0)^2}=$$
$$=\sqrt{1600+900+1600}=\sqrt{4100}\approx 64{,}4 \text{ км}.$$

Заметим, что, найдя направляющие косинусы вектора перемещения l, нетрудно определить направление движения ракеты.

§ 11. Действие над векторами, заданными в координатной форме

Пусть вектор $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ задан своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz.

Построим параллелепипед (рис. 182), диагональю которого является вектор $\boldsymbol{a}$, а ребрами служат компоненты его

a_1, a_2, a_3 относительно соответствующих координатных осей. Имеем разложение

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3. \tag{1}$$

Если ввести единичные векторы (орты) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, направленные по осям координат, то на основании связи между компонентами вектора и его проекциями (§ 7) будем иметь

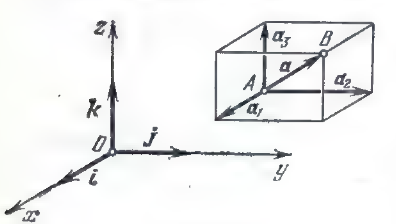


Рис. 182

$$\boldsymbol{a}_1 = a_x\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = a_y\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{a}_3 = a_z\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получаем *координатную форму вектора*

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

Заметим, что разложение (3) для вектора a е д и н с т в е н н о. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{a} = a'_x\boldsymbol{i} + a'_y\boldsymbol{j} + a'_z\boldsymbol{k}. \tag{3'}$$

Отсюда, вычитая из равенства (3) равенство (3′) и пользуясь переместительным и сочетательным свойствами суммы векторов (§ 2), а также свойствами разности векторов (§ 3), будем иметь

$$\boldsymbol{0} = (a_x - a'_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y - a'_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z - a'_z)\,\boldsymbol{k}.$$

Если хотя бы один из коэффициентов при ортах $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ был бы отличен от нуля, то векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ были бы компланарны (§ 5), что неверно. Поэтому $a'_x = a_x$, $a'_y = a_y$, $a'_z = a_z$, и единственность разложения (3) доказана.

Если $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то, очевидно, также имеем

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Рассмотренные выше линейные операции над векторами можно теперь записать в следующем виде:

1) $$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k},$$

или короче: $\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$ (λ — скаляр). Таким образом, *при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.*

2) $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\,\boldsymbol{k},$$

или кратко: $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z\}$.

Таким образом, *при сложении* (*или вычитании*) *векторов их одноименные координаты складываются* (*или вычитаются*).

Пример. Найти величину и направление равнодействующей F двух сил

$$F_1=\{10,\ 20,\ 30\} \text{ и } F_2=\{30,\ 20,\ 10\}.$$

Имеем $F=F_1+F_2=\{10+30,\ 20+20,\ 30+10\}=\{40,\ 40,\ 40\}$. Отсюда

$$F=|F|=40\sqrt{3} \text{ и } \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=1/\sqrt{3},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы равнодействующей F.

§ 12. Скалярное произведение векторов

Определение. *Под скалярным произведением двух векторов* a *и* b *понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними,* т. е. в обычных обозначениях:

$$a\cdot b\equiv(a,\ b)=ab\cos\varphi, \quad (1)$$

где $\varphi=\angle(a,\ b)$.

Заметим, что в формуле (1) скалярное произведение можно еще записывать как ab, опуская точку. Так как (рис. 183)

$$b\cos\varphi=\text{пр}_a b \text{ и } a\cos\varphi=\text{пр}_b a,$$

то можно записать

$$ab=a\cdot\text{пр}_a b=b\cdot\text{пр}_b a, \quad (2)$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого на ось с направлением первого.*

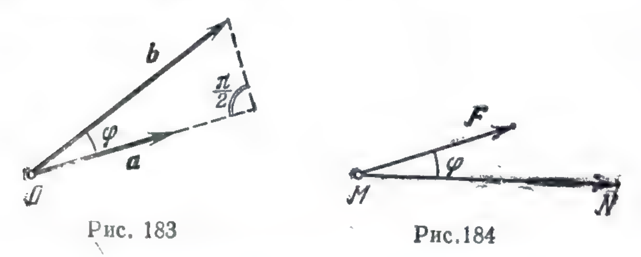


Рис. 183 Рис. 184

Физический смысл скалярного произведения. Пусть постоянная сила F обеспечивает прямолинейное перемещение $s=\overrightarrow{MN}$ материальной точки. Если сила F образует угол φ с перемещением s (рис. 184), то из физики известно, что работа силы F при перемещении s равна

$$A=Fs\cos\varphi.$$

На основании формулы (1) имеет

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \qquad (3)$$

таким образом, *работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.*

Скалярное произведение обладает следующими основными свойствами.

1) *Скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка этих сомножителей* (переместительное свойство):

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}. \qquad (4)$$

Эта формула непосредственно следует из формулы (1).

2) Для трех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедливо распределительное свойство

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}, \qquad (5)$$

т. е. *при скалярном умножении суммы векторов на вектор можно «раскрыть скобки».*

Действительно, на основании формул (2) учитывая свойства проекций векторов (§ 7, теорема 2), имеем

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \text{пр}_{c}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot c = (\text{пр}_{c}\boldsymbol{a} + \text{пр}_{c}\boldsymbol{b}) \cdot c =$$
$$= \text{пр}_{c}\boldsymbol{a} \cdot c + \text{пр}_{c}\boldsymbol{b} \cdot c = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

3) *Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора*, т. е.

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2.$$

Действительно,

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = aa \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}}) = a^2.$$

Отсюда для модуля вектора получаем формулу

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}. \qquad (6)$$

4) *Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения*, т. е.

$$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \qquad (7)$$

Это свойство также легко получается из (1).

5) *Скалярное произведение линейной комбинации векторов на произвольный вектор равно такой же линейной комбинации данных векторов на этот вектор*, т. е.

$$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

(λ и μ — скаляры).

Это—очевидное следствие 2) и 4).

Из определения (1) вытекает, что косинус угла $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ между двумя ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab}. \tag{8}$$

Из формулы (8) получаем, что *два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *перпендикулярны (ортогональны), т. е.* $\varphi = \pi/2$, *тогда и только тогда, когда*

$$\boldsymbol{ab} = 0. \tag{9}$$

Это утверждение справедливо также и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ нулевой.

Пример. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$.

Обозначая через φ угол между этими векторами, имеем

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = a\cos\varphi = a\cdot\frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{b} = \boldsymbol{ae},$$

где $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{b}}{b}$ — орт вектора $\boldsymbol{b}$.

§ 13. Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

и

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Перемножая эти векторы как многочлены (что законно в силу свойств § 12), учитывая соотношения

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1,$$

будем иметь

$$\boldsymbol{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{3}$$

Таким образом, *скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат*. Отсюда, обозначая через φ угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, получим

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4}$$

Пример. Определить угол φ между векторами

$$\boldsymbol{a}=\{1,\ +2,\ 3\} \text{ и } \boldsymbol{b}=\{-3,\ 2,\ -1\}.$$

На основании формулы (4) имеем

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot(-3)+2\cdot2+3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}}=-\frac{2}{14}=-\frac{1}{7}=-0{,}143.$$

Отсюда $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)\approx 98^\circ 10'$.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (параллельны). Согласно условию коллинеарности (§ 5)

$$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}, \tag{5}$$

где k — скаляр, что эквивалентно $b_x=ka_x$, $b_y=ka_y$, $b_z=ka_z$ или

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \tag{6}$$

Таким образом, *векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны.*

Для перпердикулярных (ортогональных) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеем $\varphi=\pi/2$ и, следовательно, $\cos\varphi=0$, или согласно формуле (4)

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Таким образом, *два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма парных произведений их одноименных координат равна нулю.*

§ 14. Векторное произведение векторов

Напомним, что тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарных векторов называется *правой* (рис. 185, *а*) или *левой* (рис. 185, *б*), если она ориентирована по правилу правого винта или соответственно по правилу левого винта.

Заметим, что если в тройке не компланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ переставить два вектора, то она изменит свою ориентацию, т. е. из правой сделается левой или наоборот.

В дальнейшем правую тройку мы будем считать стандартной.

Определение. *Под векторным произведением двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *понимается вектор*

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\equiv[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}], \tag{1}$$

для которого:

1) *модуль равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах*, т. е.

$$c = |\boldsymbol{c}| = ab \sin \varphi, \tag{2}$$

где $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ (рис. 186);

2) *этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам* (иначе говоря, перпендикулярен плоскости построенного на них параллелограмма), т. е. $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;

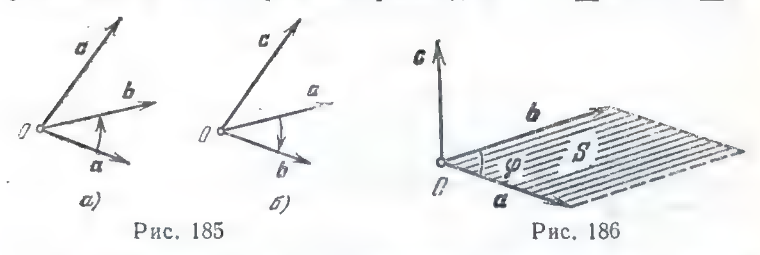


Рис. 185 Рис. 186

3) *если векторы неколлинеарны, то векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *образуют правую тройку векторов.*

Укажем основные свойства векторного произведения.

1) *При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль*, т. е.

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{3}$$

Действительно, при перестановке векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ площадь построенного на них параллелограмма остается неизменной, т. е. $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$. Однако тройка векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ является левой. Поэтому направление вектора $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ противоположно направлению вектора $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны). Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то равенство (3) очевидно.

Таким образом, *векторное произведение двух векторов не обладает переместительным свойством.*

2) *Векторный квадрат равен нуль-вектору*, т. е.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Это — очевидное следствие свойства 1).

3) *Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения*, т. е. если λ — скаляр, то

$$(\lambda \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Это свойство непосредственно вытекает из смысла произведения вектора на скаляр и определения векторного произведения.

4) *Для любых трех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *справедливо равенство*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}), \qquad (4)$$

т. е. векторное произведение обладает распределительным свойством (доказательство см. Сахарников Н. А. Высшая математика, гл. V, § 15).

Пример

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})=$$
$$=0+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+0=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

Отсюда, в частности, имеем

$$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,$$

т. е. площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, равна удвоенной площади этого параллелограмма.

С помощью векторного произведения удобно формулировать легко проверяемое необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0.$$

§ 15. Векторное произведение в координатной форме

Пусть

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

и

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Перемножая векторно эти равенства и используя свойства векторного произведения, получим сумму девяти слагаемых

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})]+$$
$$+[a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})]+$$
$$+[a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})]. \qquad (3)$$

Из определения векторного произведения следует, что для ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

и

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}.$$

Поэтому из формулы (3) получаем

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\boldsymbol{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\boldsymbol{k}(a_xb_y-a_yb_x)=$$
$$=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix} \qquad (4)$$

(с сохранением порядка следования букв x, y, z).

Для удобства запоминания формула (4) записывается в виде определителя третьего порядка (см. гл. XVII)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Из формулы (4) вытекает, что

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2. \qquad (6)$$

Геометрически формула (6) дает квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

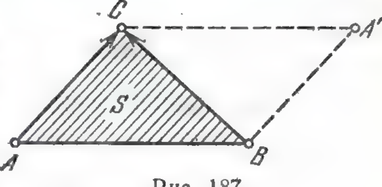


Рис. 187

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ и $C(0, 1, 1)$.

Площадь S треугольника ABC равна 1/2 площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (рис. 187). Используя формулы для проекций направленных отрезков (§ 10), имеем $\overrightarrow{AB}=\{0, -1, 1\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{-1, 0, 1\}$; отсюда

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

§ 16. Смешанное произведение векторов

Определение. *Под смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *понимается число*

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \qquad (1)$$

Построим параллелепипед П (рис. 188), ребрами которого, исходящими из общей вершины O, являются векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Тогда $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=S$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. есть площадь основания параллелепипеда. Высота этого параллелепипеда H, очевидно, равна

$$H=\pm\,\text{пр}_{\boldsymbol{s}}\,\boldsymbol{c}=\pm\,c\cos\varphi, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и знак плюс соответствует острому углу $\varphi=\angle(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{S})$, а знак минус — тупому углу φ. В первом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку, а во втором — левую тройку.

Рис. 188

На основании определения скалярного произведения (§ 12) имеем

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{c}=S\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{S}}\,\boldsymbol{c}=\pm\,SH=\pm\,V, \qquad (3)$$

где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Отсюда

$$\boldsymbol{abc}=\pm\,V,$$

т. е. *смешанное произведение трех векторов равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.*

Справедливы следующие основные свойства смешанного произведения.

1) *Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей*, т. е.

$$\boldsymbol{abc}=\boldsymbol{bca}=\boldsymbol{cab}.$$

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда П, ни ориентация его ребер.

2) *При перестановке двух соседних множителей смешанное произведение меняет свой знак на обратный*, т. е.

$$\boldsymbol{bac}=\boldsymbol{acb}=\boldsymbol{cba}=-\boldsymbol{abc}.$$

Это следует из того, что перестановка соседних множителей, сохраняя объем параллелепипеда, изменяет ориента-

цию тройки векторов, т. е. правая тройка переходит в левую, а левая — в правую.

С помощью смешанного произведения получаем необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{abc}=0$$

(объем параллелепипеда равен нулю).

Если

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k},$$

то, используя выражения в координатах для векторного (§ 15) и скалярного (§ 13) произведений, получим

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=$$
$$=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=$$
$$=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix},$$

т. е.

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Найти длину и направление вектора $\boldsymbol{a}=\{1,\ -1,\ \sqrt{2}\}$.

2. Найти величину и направление равнодействующей $\boldsymbol{F}$ трех сил $\boldsymbol{F}_1=\{10,\ 20,\ 0\}$, $\boldsymbol{F}_2=\{0,\ -10,\ 20\}$, $\boldsymbol{F}_3=\{-10,\ 0,\ -20\}$.

3. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}=\{1,\ 2,\ -2\}$ на вектор $\boldsymbol{b}=\{1,\ 0,\ -1\}$.

4. Найти работу силы $\boldsymbol{F}=\{10,\ 20,\ 30\}$, если точка приложения ее прямолинейно перемещается из пункта $M\,(0,\ 1,\ 2)$ в пункт $N\,(3,\ -4,\ 5)$.

5. Найти площадь S и угол φ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=\{1,\ -2,\ 3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{3,\ 2,\ 1\}$.

6. Являются ли компланарными векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$?

ГЛАВА XIX

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнения поверхности и линии в пространстве

Определение 1. *Уравнением поверхности в пространстве Oxyz называется такое уравнение между переменными x, y, z, которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.*

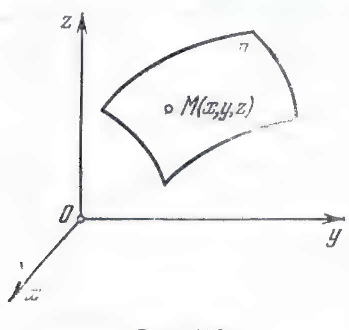


Рис. 189

То есть если

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

есть уравнение поверхности P (рис. 189), то при $M(x, y, z) \in P$[1]) имеем $F(x, y, z) = 0$, а при $N(x, y, z) \notin P$[2]) имеем $F(x, y, z) \neq 0$.

Таким образом, уравнение (1) выполнено тогда и только тогда, когда точка $M(x, y, z)$ принадлежит данной поверхности. Координаты произвольной точки поверхности называются *текущими координатами* точки. Поэтому составить уравнение поверхности — это значит найти связь между текущими координатами ее точек.

Пример 1 (уравнения координатных плоскостей). Каждая точка $M(x, y, z)$, лежащая на координатной плоскости Oyz, имеет абсциссу $x = 0$; обратно, если для какой-нибудь точки $M(x, y, z)$ абсцисса ее $x = 0$, то эта точка расположена на плоскости Oyz. Следовательно,

$$x = 0$$

есть уравнение координатной плоскости Oyz.

---

[1]) Формула $M \in P$ обозначает, что точка M принадлежит P (см. гл. II, § 1).

[2]) Формула $N \notin P$ обозначает, что точка N не принадлежит P.

Аналогично,

$$y=0 \quad \text{и} \quad z=0$$

есть соответственно уравнения координатных плоскостей Oxz и Oxy.

В более общем случае

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c \tag{2}$$

— уравнения трех плоскостей, перпендикулярных соответствующим координатным осям Ox, Oy, Oz и отсекающих на них отрезки, численно равные a, b и c.

Теорема. *Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны координатной оси, не содержит текущей координаты, одноименной с этой координатной осью, и обратно.*

Доказательство. Пусть, например, цилиндрическая поверхность P образована перемещением прямой $MN \parallel Oz$ (*образующая*) вдоль заданной линии L, лежащей в плоскости Oxy (*направляющая*) (рис. 190).

Обозначим через $M(x, y, z)$ точку поверхности P с текущими координатами x, y и z. Образующая MN, проходящая через точку M, пересекает направляющую, очевидно, в точке $N(x, y, 0)$.

Пусть

$$F(x, y)=0 \tag{3}$$

— уравнение направляющей L в координатной плоскости Oxy. Этому уравнению удовлетворяют координаты точки N. Так как точка M поверхности P имеет ту же самую абсциссу x и ту же самую ординату y, что и точка N, а переменная z в уравнение (3) не входит, то координаты точки M также удовлетворяют уравнению (3). Таким образом, координаты любой точки $M(x, y, z)$ поверхности P удовлетворяют уравнению (3). Обратно, если координаты какой-нибудь точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (3), то эта точка расположена на прямой $MN \parallel Oz$ такой, что ее след на плоскости Oxy, точка $N(x, y, 0)$, лежит на линии L, а значит, точка M принадлежит цилиндрической поверхности P. Следовательно,

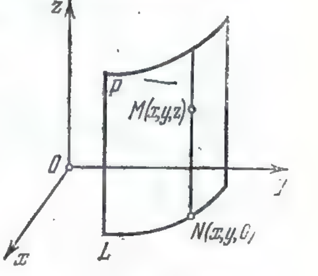


Рис. 190

$$F(x, y)=0$$

является *уравнением цилиндрической поверхности* в пространстве $Oxyz$, причем в этом уравнении отсутствует координата z.

Пример 2 (уравнение эллиптического цилиндра). *Эллиптический цилиндр*, в основании которого лежит эллипс с полуосями a и b, а осью служит ось Oz (рис. 191), на основании предыдущей теоремы имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

В частности, при $a=b$ получаем уравнение кругового цилиндра

$$x^2+y^2=a^2.$$

Линию L в пространстве можно задать как пересечение двух данных поверхностей P_1 и P_2 (рис. 192). Точка

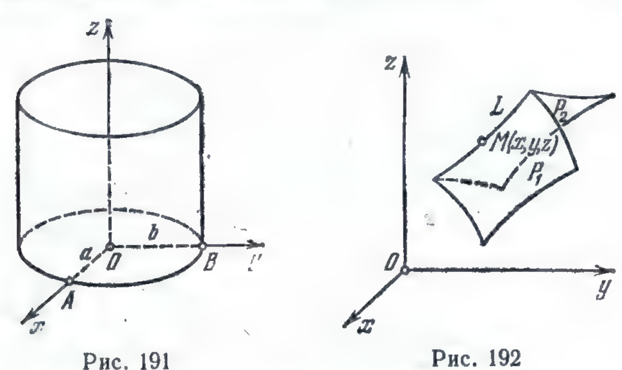


Рис. 191 Рис. 192

$M(x, y, z)$, лежащая на линии L, принадлежит как поверхности P_1, так и поверхности P_2, и следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям обеих поверхностей.

Поэтому под *уравнениями линии* в пространстве понимается совокупность двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z)=0,\\ F_2(x, y, z)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

являющихся уравнениями поверхностей, определяющих данную линию.

Не нужно думать, что для нахождения уравнений линии систему (4) следует «решить». Этого, вообще говоря,

нельзя сделать, так как число уравнений системы (4) меньше числа неизвестных. Точный смысл, который придается равенствам (4), следующий: *линии L принадлежат те и только те точки M (x, y, z), координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям системы* (4).

Заметим, что данную линию можно по-разному задавать как пересечение поверхностей. Поэтому линии в пространстве соответствует бесчисленное множество равносильных между собой систем уравнений.

Определение 2. *Уравнениями линии в пространстве Oxyz называется такая пара уравнений между переменными x, y, z, которой удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на данной линии, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.*

Пример 3 (уравнения координатных осей). Ось Ox можно рассматривать как пересечение координатных плоскостей Oxy и Oxz. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} y&=0,\\ z&=0\end{aligned}\right\}$$

есть *уравнения оси* Ox.

Аналогично,

$$\left.\begin{aligned} x&=0,\\ z&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x&=0,\\ y&=0\end{aligned}\right\}$$

— *уравнения осей* Oy и Oz соответственно.

Рис. 193

Пример 4. Написать уравнения окружности Г радиуса $R=1$, центр которой находится в точке $C(0, 0, 2)$ и плоскость которой параллельна координатной плоскости Oxy (рис. 193).

Окружность Г можно рассматривать как пересечение кругового цилиндра радиуса 1 с осью Oz и горизонтальной плоскости, расположенной выше координатной плоскости Oxy на две единицы. Поэтому уравнения данной окружности есть

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1,\\ z&=2.\end{aligned}\right\}$$

В механике линию L часто рассматривают как *след движущейся точки* (рис. 194). Пусть x, y, z — текущие координаты точки M линии L. Так как с течением времени точка M перемещается и ее координаты меняются,

то они являются функциями времени t. Следовательно, имеем

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{5}$$

где φ, ψ, χ — некоторые определенные функции. Обобщая уравнения (5), под t понимают вспомогательную переменную (*параметр*), не обязательно время; поэтому уравнения (5) носят название *параметрических уравнений линии в пространстве.*

Исключая из уравнений (5) параметр t, мы получим два соотношения между текущими координатами x, y и z,

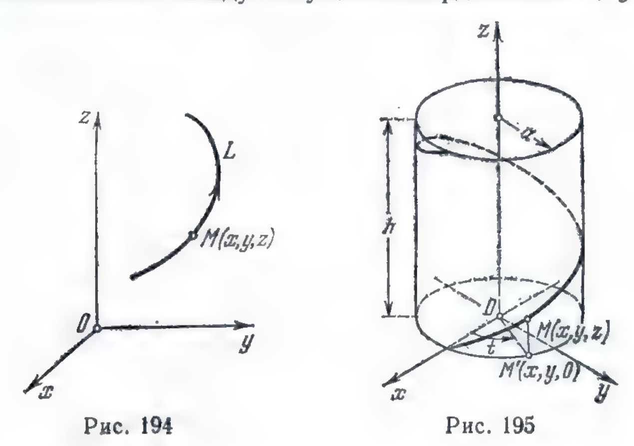


Рис. 194 Рис. 195

которые представляют собой уравнения некоторых поверхностей, проходящих через данную линию.

Пример 5. Написать уравнения винтовой линии радиуса a и шага h (рис. 195).

Пусть $M(x, y, z)$ — текущая точка винтовой линии и $M'(x, y, 0)$ — ее проекция на плоскость Oxy.

Приняв за параметр $t=\angle M'Ox$ и учитывая, что аппликата z винтовой линии растет пропорционально углу поворота t, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=a\sin t,\\ z&=bt. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для определения коэффициента пропорциональности b положим $t=2\pi$; тогда $z=h$. Следовательно,

$$h=2\pi b \quad \text{и} \quad b=\frac{h}{2\pi}.$$

Исключая параметр t из первого и второго, а также из первого и третьего уравнений (6), получим

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2, \\ x&=a\cos\frac{z}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Следовательно, винтовая линия представляет собой пересечение кругового цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, и цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oy, и имеющей своей направляющей косинусоиду, лежащую в плоскости Oxz. Из уравнений (6′) также вытекает, что проекция винтовой линии (6′) на координатную плоскость Oxy есть окружность, а на координатную плоскость Oxz — косинусоида.

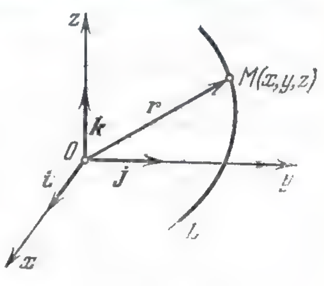


Рис. 196

Текущую точку $M(x, y, z)$ кривой L можно характеризовать ее радиусом-вектором («следящий радиус-вектор») (рис. 196)

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты). Тогда из (5) получаем *векторное уравнение линии*

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t), \qquad (7)$$

где

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{i}\varphi(t)+\boldsymbol{j}\psi(t)+\boldsymbol{k}\chi(t)$$

— так называемая *вектор-функция скалярного аргумента* t.

В механике в качестве параметра t обычно берут время. В таком случае линию (7) называют *траекторией* точки $M(x, y, z)$.

Множество всех точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (или системе уравнений), называется *геометрическим образом* (*графиком*) данного уравнения (или системы уравнений).

Пример 6. Какой геометрический образ соответствует уравнению

$$z^2-1=0? \qquad (8)$$

Из уравнения (8) получаем $z=1$ или $z=-1$. Следовательно, графиком уравнения (8) является пара плоскостей, параллельных координатной плоскости Oxy и отстоящих от нее на расстояниях, равных единице (рис. 197).

Пример 7. Какой геометрический образ соответствует паре уравнений

$$x=2, \quad y=3?$$

Искомый график представляет собой пересечение плоскостей

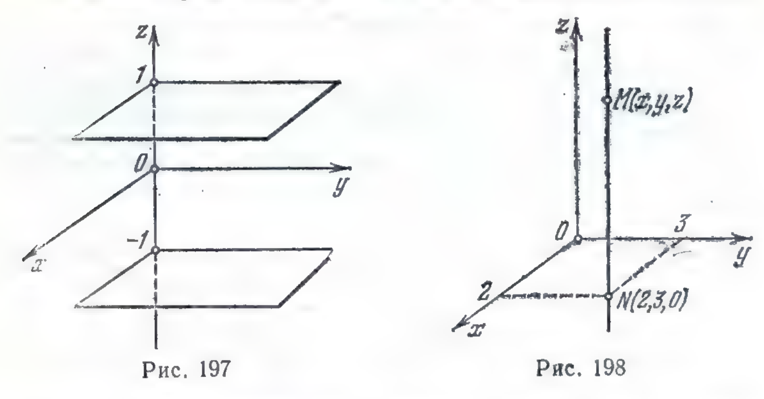


Рис. 197 Рис. 198

$x=2$ и $y=3$ и, следовательно, является прямой линией, параллельной оси Oz и имеющей след $N(2, 3, 0)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 198).

§ 2. Общее уравнение плоскости

Плоскость P в пространстве можно задать некоторой ее точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевым вектором $\boldsymbol{N}\{A, B, C\}$ $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$, перпендикулярным этой плоскости (*нормальный* или *направляющий вектор* плоскости). Пусть $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ — радиус-вектор точки M_0, а $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$ — радиус-вектор произвольной точки M плоскости (текущий радиус-вектор) (рис. 199). Тогда вектор $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ расположен в данной плоскости и, следовательно, ортогонален вектору $\boldsymbol{N}$, т. е. $\boldsymbol{N} \perp (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$. Отсюда, используя условие ортогональности двух векторов (гл. XVIII, § 12), имеем

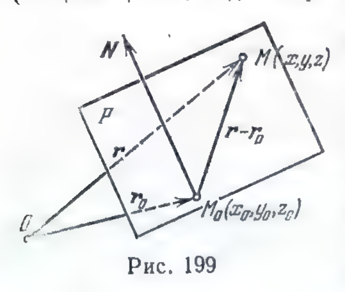


Рис. 199

$$\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0. \qquad (1)$$

Это и есть *уравнение плоскости в векторном виде.* В координатной форме уравнение (1) имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (2)$$

или

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{3}$$

где

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0\equiv-\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}_0.$$

Уравнение (3) называется *общим уравнением плоскости* и представляет собой уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, z. Таким образом, плоскость есть поверхность первого порядка.

Обратно, пусть дано невырожденное уравнение (3) ($A^2+B^2+C^2\neq0$). Выберем некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на поверхности (3) (например, если $A\neq0$, то в качестве такой точки можно взять $M_0(-D/A, 0, 0)$ и т. п.). Имеем

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{4}$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (4), будем иметь

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{5}$$

Отсюда, введя векторы $\boldsymbol{N}=\{A, B, C\}$, $\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$ и $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$, получим

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.$$

Следовательно, поверхность, заданная уравнением (3), является плоскостью, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{N}$.

Пример 1. Найти угол, образованный плоскостью $x-2y+2z-10=0$ с осью Oz.

Под углом ψ между прямой и плоскостью понимается угол между данной прямой и ее проекцией на эту плоскость; этот угол является дополнительным к углу φ, образованному прямой и перпендикуляром (нормалью) к плоскости.

Нормальный вектор нашей плоскости есть $\boldsymbol{N}=\{1, -2, 2\}$. Отсюда

$$\sin\psi=\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

и, следовательно, $\psi=\arcsin\frac{2}{3}\approx41°50'$.

Если в уравнении (1) в качестве направляющего вектора плоскости взять единичный вектор $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{N}/N$ ($N=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\neq0$), то получим так называемое *нормированное уравнение плоскости*

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0, \tag{6}$$

или, в координатах,

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \qquad (7)$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Уравнение (7) удобно при нахождении расстояния точки от плоскости.

З а д а ч а. Найти расстояние h от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости P, заданной уравнением (6) (рис. 200).

Пусть $h=M_1N_1$, где $\overrightarrow{M_1N_1}\perp P$, $N_1\in P$.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$, где $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}_1$ — радиус-векторы точек $M_0\in P$ и M_1. Из $\triangle M_0M_1N_1$, учитывая, что $\overrightarrow{M_1N_1}\parallel\boldsymbol{n}$, находим

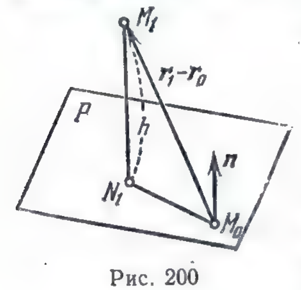


Рис. 200

$$h=|\text{пр}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)|=|\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)|=$$
$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Следовательно, получаем правило: *чтобы найти расстояние от точки до плоскости, нужно в левую часть нормированного уравнения плоскости подставить координаты данной точки и взять абсолютную величину полученного результата.*

В частности, полагая $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$, получаем р а с с т о я н и е о т н а ч а л а к о о р д и н а т д о п л о с к о с т и:

$$h_0=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

§ 3. Угол между плоскостями

Пусть даны две плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0 \qquad (1)$$

с направляющими векторами $\boldsymbol{N}=\{A, B, C\}$ и $\boldsymbol{N}'=\{A', B', C'\}$. Тогда φ — двугранный угол между ними — равен углу, образованному векторами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}'$. Таким образом, имеем (см. гл. XVIII, § 12)

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{NN}'}{NN'}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{NN}'=AA'+BB'+CC'$ и $N=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, $N'=\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$.

Отсюда получаем: 1) условие параллельности плоскостей (в широком смысле)

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C} \tag{3}$$

и 2) условие их перпендикулярности

$$AA'+BB'+CC'=0. \tag{4}$$

Заметим, что если для плоскостей (1) не выполнено условие (3), то эти плоскости не параллельны и не сливаются, т. е. являются пересекающимися.

Пример. Определить угол φ между биссекторными плоскостями

$$x-z=0, \quad y-z=0.$$

Здесь $N=\{1, 0, -1\}$, $N'=\{0, 1, -1\}$. Имеем

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

и, следовательно, $\varphi=60°$.

§ 4. Уравнения прямой линии в пространстве

Прямая в пространстве однозначно определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направлением (т. е. некоторым вектором).

Пусть $\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$ — радиус-вектор точки M_0 и $\boldsymbol{s}=\{l, m, n\}$ — ненулевой направляющий вектор прямой (длина его произвольна). Обозначая через $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$ радиус-вектор произвольной точки M прямой (текущий радиус-вектор), из векторного треугольника OM_0M (рис. 201) имеем

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\overrightarrow{M_0M}. \tag{1}$$

Так как векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{s}$ коллинеарны, то

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{s}, \tag{2}$$

где t — некоторый скаляр $(-\infty<t<+\infty)$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получим *векторное уравнение прямой линии в пространстве*

Рис. 201

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{s} \tag{3}$$

(t — параметр).

Проектируя равенство (3) на координатные оси, будем иметь *параметрические уравнения прямой линии в пространстве*

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Если из уравнений (4) исключить параметр t, то получим так называемые *канонические уравнения прямой линии в пространстве*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \text{[1]}. \qquad (5)$$

Система (5) содержит два уравнения, например, при $n \neq 0$ можно положить

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения двух плоскостей, пересечением которых является данная прямая. Заметим, что первое уравнение не содержит координаты y, а второе — координаты x. Следовательно (см. § 1), первая плоскость параллельна оси Oy, а вторая параллельна оси Ox, т. е. эти плоскости являются плоскостями, проектирующими нашу прямую на координатную плоскость Oxz и соответственно на координатную плоскость Oyz.

Числа l, m, n называются *направляющими коэффициентами прямой линии*. Обозначая через α, β, γ углы, образованные прямой с координатными осями (рис. 201) и учитывая, что $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ являются направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{s}$, будем иметь

$$l = s\cos\alpha, \quad m = s\cos\beta, \quad n = s\cos\gamma, \qquad (6)$$

где

$$s = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \neq 0 \qquad (7)$$

— длина вектора $\boldsymbol{s}$. Отсюда получаем

$$\cos\alpha = \frac{l}{s}, \quad \cos\beta = \frac{m}{s}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{s}$$

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1).$$

Таким образом, направляющие коэффициенты прямой пропорциональны соответствующим направляющим косинусам этой прямой.

---

[1]) Эти уравнения имеют смысл пропорций, т. е. какие-то (не более чем два) из чисел l, m, n могут быть нулями.

Уравнения прямой (5) можно записать в стандартном виде

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}, \tag{5'}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы прямой.

Пример 1. Уравнения движения ракеты $x=2t$, $y=-4t$, $z=4t$, где время t дано в секундах, а координаты (x, y, z) движущейся точки — в километрах.

Какова траектория ракеты? На каком расстоянии будет находиться ракета M от точки старта $O(0, 0, 0)$ через 10 секунд?

Исключая из данных уравнений время t, получим уравнения траектории $\frac{x}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{4}$, или

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}.$$

Таким образом, траектория представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат.

При $t=10$ с имеем $x=20$, $y=-40$, $z=40$ и

$$r=OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{400+1600+1600}\text{ км}=\sqrt{3600}\text{ км}=60\text{ км}.$$

Задача. Написать уравнения прямой, проходящей через две несовпадающие точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

За направляющий вектор прямой можно принять

$$\boldsymbol{s}=\{x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0\}\neq 0.$$

Следовательно, на основании (5) имеем

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{8}$$

Пример 2. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(3, -4, 5)$ и параллельной оси Oz.

Очевидно, имеем $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$. Таким образом, в силу (5′) получаем уравнения искомой прямой

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-5}{1}, \tag{9}$$

эквивалентные паре уравнений

$$\frac{x-3}{0}=\frac{z-5}{1},\quad \frac{y+4}{0}=\frac{z-5}{1}\ ^{1)},$$

или

$$x-3=0,\quad y+4=0.$$

Направляющий вектор прямой (9) есть $\{0, 0, 1\}$, т. е. эта прямая перпендикулярна осям Ox и Oy.

---

[1]) См. подстрочное примечание на с. 368.

Прямую L в пространстве можно задать также как линию пересечения двух плоскостей P и P' (рис. 202):

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Предполагается, что плоскости не параллельны и не сливаются (см. § 4). Векторы $\boldsymbol{N}=\{A, B, C\}$ и $\boldsymbol{N}'=\{A', B', C'\}$ являются нормальными векторами этих плоскостей. Направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ прямой, очевидно, удовлетворяет условиям: $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{N}'$. Можно положить

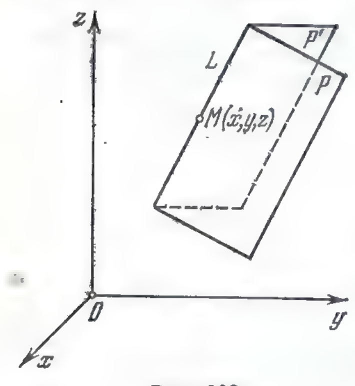


Рис. 202

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}'$$

($\times$ — знак векторного произведения (см. гл. XVIII, § 15)).

Пример 3. Определить направляющие косинусы прямой

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z-4=0, \\ 3x-2y+z=0. \end{aligned}\right\}$$

Имеем $\boldsymbol{N}=\{1, -2, 3\}$, $\boldsymbol{N}'=\{3, -2, 1\}$. Отсюда

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}'=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=4(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

За направляющий вектор прямой можно принять $\boldsymbol{s}_0=\frac{1}{4}\boldsymbol{s}=\{1, 2, 1\}$; длина его $s_0=\sqrt{6}$. Отсюда

$$\cos\alpha=1/\sqrt{6}, \quad \cos\beta=2/\sqrt{6}, \quad \cos\gamma=1/\sqrt{6}.$$

§ 5. Понятие о производной вектор-функции

Пусть мы имеем вектор-функцию

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{i}+y(t)\,\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

($\alpha<t<\beta$), где для удобства функции параметра t, представляющие проекции вектора $\boldsymbol{r}(t)$ на оси координат, обозначены соответствующими буквами (ср. § 1). Если трактовать $\boldsymbol{r}(t)$ как радиус-вектор точки $M(x, y, t)$ пространства $Oxyz$, то конец переменного вектора $\boldsymbol{r}(t)$ опишет некоторую кривую K пространства $Oxyz$, параметрическими уравнениями которой является векторное уравнение (1).

Механики эту кривую называют *годографом* переменного вектора $\boldsymbol{r}(t)$.

Естественно определим *предел вектор-функции*, полагая

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}\lim_{t\to t_0}x(t)+\boldsymbol{j}\lim_{t\to t_0}y(t)+\boldsymbol{k}\lim_{t\to t_0}z(t), \qquad (2)$$

если пределы в правой части равенства (2) существуют.

Дадим параметру t приращение Δt; тогда точка $M(x, y, z)$ кривой K переместится в точку этой кривой $M'(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, радиус-вектор которой есть

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{r}(t)+\Delta\boldsymbol{r}(t).$$

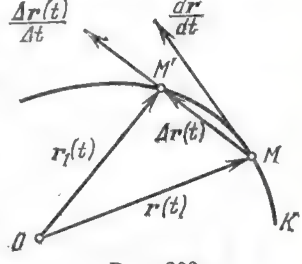


Рис. 203

Из векторного треугольника OMM' имеем (рис. 203)

$$\Delta\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{MM'}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}.$$

Отсюда, предполагая для определенности, что $\Delta t>0$, получим

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}, \qquad (3)$$

т. е. вектор $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ направлен по секущей $\overrightarrow{MM'}$.

В общем случае, при $\Delta t\neq 0$ вектор $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ будет коллинеарен вектору $\overrightarrow{MM'}$.

Определение. *Под производной вектор-функции $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ понимается вектор*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Если $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — дифференцируемые функции, то из формулы (3) при $\Delta t\to 0$ находим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}. \qquad (5)$$

Так как предельное положение секущей по определению есть касательная, то вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ направлен по *касательной к кривой* K в точке ее M (в сторону возрастания параметра t).

Из формулы (5), как обычно, получаем

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (6)$$

Если t — время, то вектор $\frac{dr}{dt}=v$ представляет собой скорость движущейся точки $M(x, y, z)$, понимаемую как вектор.

Пример. Написать уравнение касательной к кривой

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3$$

в точке ее $M(1, 1, 1)$ $(t=1)$.

Здесь

$$r=ti+t^2j+t^3k \quad \text{и} \quad \frac{dr}{dt}=i+2tj+3t^2k.$$

Отсюда направление касательной в точке M определяется вектором

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_M=i+2j+3k.$$

Таким образом, уравнение искомой касательной есть

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

§ 6. Уравнение сферы

Определение. *Сферой радиуса R называется множество всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки (центра) равно R.*

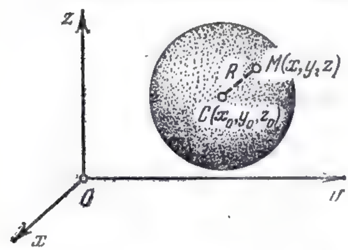


Рис. 204

Выведем уравнение сферы. Пусть $C(x_0, y_0, z_0)$ — центр сферы радиуса R, а $M(x, y, z)$ — произвольная точка, лежащая на этой сфере (рис. 204). Тогда $CM=R$. По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$CM=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Приравнивая это выражение R, получим уравнение сферы

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

или окончательно

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Если центр сферы совпадает с началом координат, то $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, и уравнение сферы принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Пример 1. Определить координаты центра и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2-2y+3z=0.$$

Объединяя члены, содержащие одноименные текущие координаты, и дополняя их до полных квадратов, будем иметь

$$x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}.$$

Следовательно, центр сферы находится в точке $C\left(0,\ 1,\ -1\frac{1}{2}\right)$ и радиус ее

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Заметим, что совокупность

$$\left.\begin{array}{r}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,\\ Ax+By+Cz+D=0\end{array}\right\}$$

уравнений сферы и плоскости определяет окружность, по которой пересекаются плоскость и сфера (если это множество не пусто). В частности, если $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то совокупность этих уравнений изображает окружность большого круга.

Уравнение окружности можно также писать в параметрическом виде.

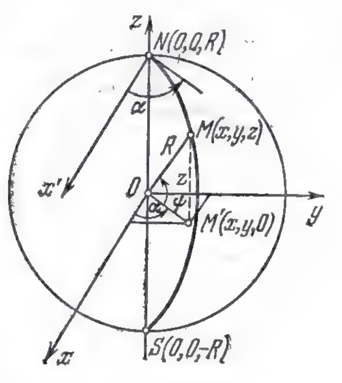


Рис. 205

Пример 2. Написать параметрические уравнения меридиана сферы

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

проходящего через полюсы $N(0,\ 0,\ R)$ и $S(0,\ 0,\ -R)$, если плоскость меридиана образует угол α с координатной плоскостью Oxz (рис. 205).

За параметр текущей точки $M(x,\ y,\ z)$ меридиана примем угол $\psi=\angle MOM'$ — широту этой точки, где $M'(x,\ y,\ 0)$ — проекция точки M на координатную плоскость Oxy. Так как $M'O=r=R\cos\psi$, то из рис. 205 имеем

$$\left.\begin{array}{l}x=r\cos\alpha=R\cos\psi\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha=R\cos\psi\sin\alpha,\\ z=R\sin\psi,\end{array}\right\}$$

где $-\pi/2\leqslant\psi\leqslant\pi/2$.

§ 7. Уравнение эллипсоида

Определение. *Трехосным эллипсоидом называется поверхность, полученная в результате равномерной деформации (растяжения или сжатия) сферы по трем взаимно перпендикулярным направлениям* (ср. гл. IV, § 4).

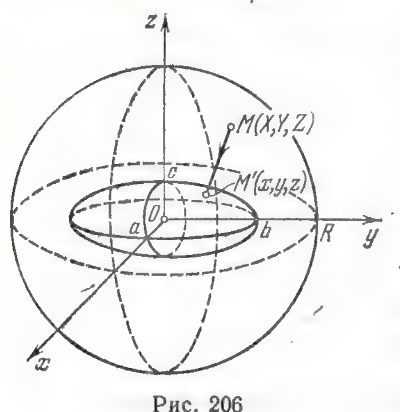


Рис. 206

Рассмотрим сферу радиуса R с центром в начале координат:

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2, \quad (1)$$

где X, Y, Z — текущие координаты точки сферы.

Пусть данная сфера подвергнута равномерной деформации в направлении координатных осей Ox, Oy и Oz с коэффициентами деформации, равными k_1, k_2 и k_3 [1]).

В результате сфера превратится в эллипсоид, а точка сферы $M(X, Y, Z)$ с текущими координатами X, Y, Z перейдет в точку эллипсоида $M'(x, y, z)$ с текущими координатами x, y, z, причем

$$x=k_1X, \quad y=k_2Y, \quad z=k_3Z$$

(рис. 206). Отсюда

$$X=\frac{x}{k_1}, \qquad Y=\frac{y}{k_2}, \qquad Z=\frac{z}{k_3}.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (1), будем иметь

$$\frac{x^2}{k_1^2}+\frac{y^2}{k_2^2}+\frac{z^2}{k_3^2}=R^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

где $a=k_1R$, $b=k_2R$, $c=k_3R$. Уравнение (2) связывает текущие координаты точки M' эллипсоида и, следовательно, является *уравнением трехосного эллипсоида*.

---

[1]) Иными словами, линейные размеры сферы в направлении оси Ox уменьшаются в $\frac{1}{k_1}$ раз, если $0 < k_1 \leqslant 1$ и увеличиваются в k_1 раз, если $k_1 > 1$, и т. д.

Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида*; удвоенные величины $2a$, $2b$ и $2c$ называются *осями эллипсоида* и, очевидно, представляют линейные размеры его в направлениях деформации (в данном случае в направлениях осей координат).

Если две полуоси эллипсоида равны между собой, то эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*, так как может быть получен в результате вращения эллипса вокруг одной из его осей. Например, в геодезии считают поверхность земного шара эллипсоидом вращения с полуосями

$$a = b = 6377 \text{ км и } c = 6356 \text{ км}.$$

Если $a = b = c$, то эллипсоид превращается в сферу.

§ 8. Уравнение параболоида вращения

Пусть вертикальная парабола

$$X^2 = 2pZ, \qquad (1)$$

расположенная в плоскости Oxz, вращается вокруг своей оси (ось Oz). При вращении получается поверхность, носящая название *параболоида вращения* (рис. 207).

Для вывода уравнения поверхности рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ параболоида вращения, и пусть эта точка получена в результате вращения точки $N(X, 0, Z)$ данной параболы вокруг точки $C(0, 0, Z)$.

Так как точки M и N расположены в одной и той же горизонтальной плоскости и $CN = CM$ — как радиусы одной и той же окружности, то имеем

$$X = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z = z. \qquad (2)$$

Рис. 207

Подставляя формулы (2) в уравнение (1), получим *уравнение параболоида вращения*

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Заметим, что форму параболоида вращения имеет поверхность ртути, находящейся в вертикальном цилиндрическом сосуде, быстро вращающемся вокруг своей оси. Это обстоятельство используют в технике для получения параболических зеркал.

Упражнения

1. Какие геометрические образы в пространстве соответствуют данным уравнениям:

а) $xy=0$; б) $xz=yz$; в) $y^2+y-2=0$; г) $z^2=2x$; д) $y=1, z=-2$; е) $x^2=0$; ж) $x^2+y^2=0$; з) $x^2+y^2+z^2=0$.

2. Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $x-y+z\sqrt{2}-8=0$, и углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат.

3. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки длины 2 и 3 соответственно.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$ и перпендикулярной оси Oz.

5. Значения функции $z=f(x, y)$ заданы таблицей с двумя входами:

y \ x	70	80
10	1,23	1,34
40	1,40	

Приближенно найти z при $x=72$ и $y=20$, считая функцию z линейной, т. е. первой степени относительно x и y.

6. Какие углы образует прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-\sqrt{2}}$ с осями координат?

7. Найти «следы» (т. е. точки пересечения) прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ на координатных плоскостях.

8. Написать уравнение сферы с центром в точке $C(2, -2, 1)$ и проходящей через начало координат.

9. Для сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ написать параметрические уравнения параллели с угловым расстоянием α ($|\alpha|<\pi/2$) от экватора $z=0$, приняв за параметр долготу φ текущей точки $M(x, y, z)$.

10. Определить полуоси эллипсоида $x^2+2y^2+3z^2=4$.

11. Определить полуоси эллипса, образованного пересечением эллипсоида $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ плоскостью $x=3$.

12. Написать уравнения касательной к винтовой линии

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=bt \qquad (1)$$

в точке ее M_0, соответствующей параметру $t=t_0$. Какой угол образует эта касательная с осью Oz? Найти проекции винтовой линии на координатные плоскости.

ГЛАВА XX
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Понятие функции от нескольких переменных

Во многих вопросах геометрии, естествознания и т. д. приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных. Приведем примеры.

Пример 1. Площадь треугольника $U = xy/2$ с основанием x и высотой y есть функция от двух переменных x и y, определенная в области $x > 0$ и $y > 0$.

Пример 2. Разрешая уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ относительно z, при $z \geqslant 0$ получим $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Здесь аппликата z точки верхней полусферы есть функция двух переменных x и y — абсциссы и ординаты этой точки. Данная функция определена в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Пример 3. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyz$ с измерениями x, y и z есть функция этих трех переменных, определенная в положительном октанте пространства $Oxyz$.

Пример 4. Величина силы притяжения F двух материальных точек, имеющих массы m и m_1 и занимающих соответственно положения $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, согласно закону Ньютона равна

$$F = k\frac{mm_1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

где k — некоторая константа (так называемая «постоянная тяготения»). Следовательно, F есть функция от шести переменных x, y, z, x_1, y_1, z_1.

Сделаем одно важное замечание: *всякая функция от нескольких переменных становится функцией от меньшего числа переменных, если часть переменных зафиксировать*, т. е. придать постоянные значения.

Например, пусть мы имеем функцию

$$u = f(x, y, z)$$

от трех переменных x, y и z. Если положить, что z сохраняет постоянное значение $z = c$, то мы получим функцию от двух переменных x и y:

$$u = f(x, y, c).$$

Далее, предполагая, что две переменные y и z сохраняют неизменные значения $y=b$ и $z=c$, получим функцию $u=f(x, b, c)$ от одной переменной x.

Таким образом, в разных вопросах, по желанию, функцию u можно рассматривать как функцию одной, двух или трех переменных.

Строго говоря, почти всякая физическая зависимость дает нам пример функции весьма большого количества переменных. Но при изучении этой зависимости мы игнорируем часть несущественных факторов и тем самым ограничиваем число переменных, сводя его к минимуму.

Например, путь s, пройденный свободно падающим телом за время t, зависит от следующих переменных: t — времени падения, Q — площади поперечного сечения тела, φ — широты места, h — высоты места над уровнем моря, P — давления воздуха, T — температуры воздуха, η — коэффициента вязкости воздуха и т. д. Так что мы должны написать

$$s=f(t, Q, \varphi, h, P, T, \eta, \ldots).$$

В первом приближении все переменные, кроме времени t, являются малосущественными. Игнорируя их, получим $s=f(t)$ и тем самым приходим к известной формуле

$$s=\frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести, которое считается постоянным.

Если хотя бы частично учесть роль других переменных, то мы будем иметь формулы для s все более и более соответственно точные, зависящие от все более возрастающего числа переменных.

Геометрическим изображением (*графиком*) функции двух переменных

$$z=f(x, y) \tag{1}$$

является, вообще говоря, поверхность в пространстве $Oxyz$.

В самом деле, пусть данная функция определена в некоторой области ω плоскости Oxy. Тогда каждой паре значений x и y из области ω соответствует по формуле (1) некоторое значение z; иными словами, каждой точке $N(x, y, 0) \in \omega$ ставится в соответствие точка $M(x, y, z)$, принадлежащая графику функции и являющаяся концом перпендикуляра NM к плоскости Oxy.

Если точка N занимает всевозможные положения, исчерпывающие область ω, то связанная с ней точка M, в общем случае, опишет в пространстве некоторую поверхность P[1]), «нависающую» над областью ω. Наглядно можно представлять себе, что P есть «крыша», построенная над площад-

[1]) Речь идет о простейших элементарных функциях.

кой ω. Поверхность P и является геометрическим изображением функции (1) (рис. 208). Геометрические изображения функций трех и большего числа переменных не имеют простого геометрического смысла.

В некоторых случаях можно получить наглядное геометрическое представление о характере изменения функции,

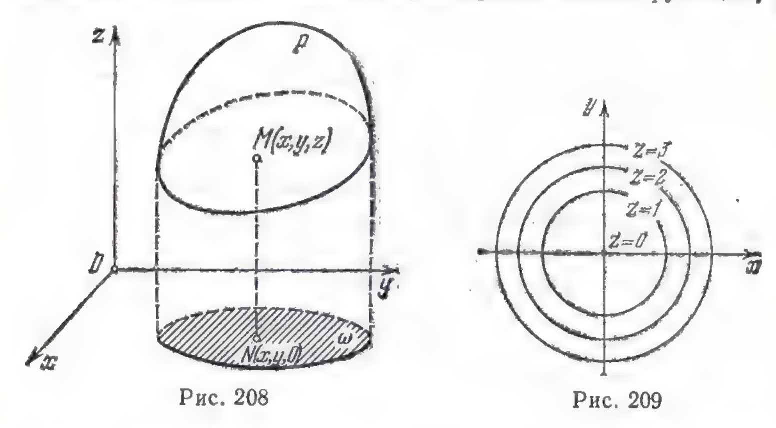


Рис. 208

Рис. 209

рассматривая ее *линии уровня* (или *поверхности уровня*), т. е. линии (или поверхности), где данная функция сохраняет постоянное значение.

Определение 1. *Линией уровня функции*

$$z = f(x, y)$$

называется множество всех точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение (*изокривая*).

Таким образом, уравнение линии уровня есть

$$f(x, y) = C,$$

где C — некоторая постоянная.

Пример. Построить семейство линий уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Давая z неотрицательные значения $z = 0, 1, 2, \dots$ (z, очевидно, не может быть отрицательным), получим соответственно уравнения линий уровня функции: $x^2 + y^2 = 0$ — точка $O(0, 0)$; $x^2 + y^2 = 1$ — окружность радиуса $R = 1$ с центром $O(0, 0)$; $x^2 + y^2 = 2$ — окружность радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром $O(0, 0)$ и т. д.

Таким образом, линии уровня нашей функции представляют собой семейство концентрических окружностей с центром O. Построив эти линии, получим «карту поверхности» для данной функции, с отмеченными высотами (рис. 209).

На рис. 209 мы наглядно видим, что функция z растет вдоль каждого радиального направления. Поэтому в пространстве $Oxyz$

геометрический образ функции представляет собой гигантскую «яму» с круто растущими краями. Теоретически, это — **параболоид вращения** (см. гл. XIX, § 8).

Определение 2. *Поверхностью уровня функции*

$$u = f(x, y, z)$$

называется множество всех точек пространства Oxyz, для которых данная функция имеет одно и то же значение (*изоповерхности*).

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или с одинаковым средним суточным давлением, получим соответственно изотермы и изобары, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды.

§ 2. Непрерывность

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция от двух переменных x и y, совокупность значений (x, y) которых для краткости будем называть точкой; таким образом, z есть функция «точки».

Дадим переменной x приращение Δx, оставляя переменную y неизменной. Тогда разность

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{1}$$

называется *частным приращением функции* $f(x, y)$ *по переменной* x. Следовательно, можно написать

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{2}$$

Аналогично, если только переменной y дается приращение Δy, а переменная x остается неизменной, то разность

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{2'}$$

называется *частным приращением функции* $f(x, y)$ *по переменной* y.

Наконец, может случиться, что обе переменные x и y получили соответственно приращения Δx и Δy. Тогда соответствующее приращение функции

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{3}$$

называется *полным приращением функции* $f(x, y)$ (или просто *приращением функции*).

Естественно, что здесь рассматриваются лишь такие точки

$$(x,\ y),\ (x+\Delta x,\ y),\ (x,\ y+\Delta y),\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y),$$

для которых функция f имеет смысл, т. е. определена.

Заметим, что из формул (2), (2′) и (3) следует, что *полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений этой функции*:

$$\Delta f(x,\ y) \neq \Delta_x f(x,\ y) + \Delta_y f(x,\ y).$$

Пример. Найти приращение функции $f(x,\ y) = x^2 + xy - 2y^2$ где x изменилось от 2 до 2,2 и y — от 1 до 0,9.

Здесь $\Delta x = 0{,}2$ и $\Delta y = -0{,}1$. Имеем

$$f(2;\ 1) = 2^2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1^2 = 4$$

и

$$f(2{,}2;\ 0{,}9) = 2{,}2^2 + 2{,}2\cdot 0{,}9 - 2\cdot 0{,}9^2 = 5{,}20.$$

Следовательно,

$$\Delta f(2;\ 1) = 5{,}20 - 4 = 1{,}20.$$

Аналогично определяются и записываются частные и полные приращения функции с числом переменных, большим двух.

Определение 1. *Функция $f(x,\ y)$ называется непрерывной в точке $(x_0,\ y_0)$, если: 1) функция определена в данной точке и эта точка является предельной для области существования функции; 2) бесконечно малым приращениям*

$$\Delta x_0 = x - x_0 \ \text{и}\ \Delta y_0 = y - y_0$$

переменных x и y соответствует бесконечно малое приращение $\Delta f(x_0,\ y_0)$ функции $f(x,\ y)$, т. е. при любом способе стремления приращений Δx_0 и Δy_0 к нулю, для которых $f(x_0 + \Delta x_0,\ y_0 + \Delta y_0)$ имеет смысл, выполнено условие

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \Delta f(x_0,\ y_0) = \lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} [f(x_0 + \Delta x_0,\ y_0 + \Delta y_0) - f(x_0,\ y_0)] = 0\text{[1]}. \qquad (4)$$

Для наглядности можно мыслить, что функция $f(x,\ y)$, непрерывная в точке $(x_0,\ y_0)$, определена как в самой этой точке, так и в некоторой окрестности ее, причем при достаточно малых по модулю Δx_0 и Δy_0 имеет место равенство (4).

Определение 2. *Функция $f(x,\ y)$ называется непрерывной в данной области, если эта функция*

---

[1]) Определение предела функции см. гл. VII, § 3, замечание.

непрерывна в каждой точке рассматриваемой области, т. е. если для каждой точки $(x,\ y)$ области имеем

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \Delta f(x,\ y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)] = 0, \quad (5)$$

причем здесь мы, как обычно, предполагаем, что смещенная точка $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ принадлежит данной области и $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ существует (множество таких точек непусто в любой окрестности точки $(x,\ y)$ в силу определения 1). Таким образом, можно сказать, что *функция непрерывна тогда и только тогда, когда бесконечно малым приращениям ее аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.*

П р и м е р. Функция $f(x,\ y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y}$ определена и непрерывна в треугольнике: $\Delta = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;\ x+y \leqslant 1\}$. Заметим, что точки границы множества Δ не являются его в н у т р е н н и м и т о ч к а м и.

Из формулы (5) следует, что

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = f(x,\ y) + \alpha, \quad (6)$$

где α — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Таким образом, *если функция $f(x,\ y)$ непрерывна, то значения ее в двух бесконечно близких точках отличаются друг от друга на бесконечно малую функцию.*

Положим $x+\Delta x = x_1$, $y+\Delta y = y_1$; очевидно, при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ имеем $x_1 \to x$ и $y_1 \to y$ и обратно. Тогда из формулы (5) получаем э к в и в а л е н т н о е о п р е д е л е н и е н е п р е р ы в н о с т и ф у н к ц и и

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ y_1 \to y}} f(x_1,\ y_1) = f(x,\ y).$$

§ 3. Частные производные первого порядка

Пусть дана функция

$$z = f(x,\ y).$$

Для простоты здесь и в дальнейших параграфах по смыслу будем предполагать, что для каждой рассматриваемой точки $(x,\ y)$ функция $f(x,\ y)$ определена в некоторой полной окрестности этой точки.

Рассмотрим отношение частного приращения,

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y),$$

функции z по переменной x к приращению Δx этой переменной

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Предел этого отношения при Δx, стремящемся к нулю, если таковой существует, называется *частной производной* (*первого порядка*) *функции* $z = f(x, y)$ *по* x и обозначается так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y).$$

Мы имеем, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется *частная производная* $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ *от функции* $x = f(x, y)$ *по* y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Определение. *Частной производной функции от нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.*

Заметим, что если от функции $z = f(x, y)$ берется производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, то y считается постоянным; если же находится $\frac{\partial z}{\partial y}$, то x считается постоянным.

Поэтому *частная производная функции от нескольких переменных равна производной той функции одной переменной, которая получится, если все независимые переменные данной функции, кроме соответствующей одной, считать постоянными*, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}[f(x, y)], \quad \text{где} \quad y = \text{const}, \text{ и т. д.}$$

Следовательно, частное дифференцирование не требует никаких новых правил дифференцирования, и мы можем пользоваться известными формулами (см. гл. X, § 13).

Пример 1. Пусть $z = x^3 \sin y + y^4$.
Легко видеть, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3.$$

Аналогично определяются и вычисляются частные производные функции $u=f(x, y, z)$ трех переменных x, y, z и т. д.

Пример 2. Пусть $u=x^6-y^4+3z^5$; тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^5, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-4y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=15z^4.$$

Для функции

$$z=f(x, y)$$

нетрудно выяснить геометрический смысл ее частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_x(x, y)$. Геометрическим изображением данной функции является некоторая поверхность P (рис. 210).

Полагая $y=\text{const}$, мы получаем плоскую кривую Γ_x, представляющую собой сечение поверхности P соответствующей плоскостью, параллельной координатной плоскости Oxz. Пусть MK — касательная к кривой Γ_x в точке

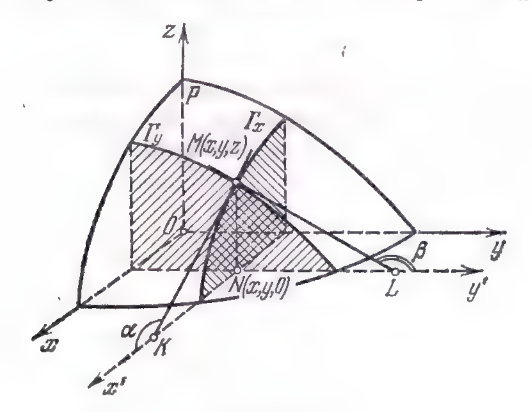


Рис. 210

$M(x, y, z)$ и α — угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси Ox. Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\frac{dz}{dx}\right]_{y=\text{const}},$$

на основании геометрического смысла обычной производной имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогично, если Γ_y есть сечение поверхности P плоскостью $x=\text{const}$ и β — угол, образованный с осью Oy

касательной ML в точке $M(x, y, z)$ к кривой Γ_y, то

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

§ 4. Полный дифференциал функции

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция от двух независимых переменных x и y. Полное приращение этой функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

представляет собой разность значений данной функции в точках $M(x, y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Обозначим через ρ расстояние между этими точками:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Если при $\rho \to 0$ можно подобрать не зависящие от Δx и Δy величины A и B так, что выражение

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y$$

будет отличаться от полного приращения Δz функции на величину высшего порядка малости по сравнению с ρ, то это выражение называется *главной линейной частью* полного приращения функции. В этом случае мы получим

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \gamma\rho, \qquad (1)$$

где $\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$ (или, что то же самое, $\gamma \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$).

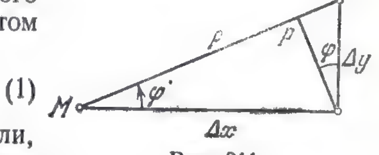


Рис. 211

Выражение (1) можно записать в другом виде. Поскольку $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \sin \varphi$ (рис. 211), имеем

$$\rho = \Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi;$$

отсюда

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \qquad (1')$$

где

$$\alpha = \gamma \cos \varphi \to 0 \quad \text{и} \quad \beta = \gamma \sin \varphi \to 0$$

при $\rho \to 0$, т. е. при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ и обратно.

Обобщая определение дифференциала функций одной независимой переменной на случай функции двух независимых переменных, приходим к следующим определениям.

Определение 1. *Под дифференциалом независимой переменной понимается приращение этой*

переменной, т. е.

$$dx = \Delta x \quad \text{и} \quad dy = \Delta y.$$

Определение 2. *Полным дифференциалом функции* (*или короче дифференциалом функции*) $z = f(x, y)$ *двух независимых переменных* x *и* y *называется главная линейная часть полного приращения этой функции.*

Это определение естественным образом распространяется на функции любого числа переменных.

Обозначая дифференциал функции буквой d, можно написать

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y, \tag{2}$$

где A и B не зависят от Δx и Δy и, сверх того,

$$\Delta z - dz = \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y,$$

где α и β — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Функция, имеющая дифференциал в данной области, называется *дифференцируемой* в этой области. Если функция z дифференцируема, то для полного приращения Δz функции имеет место формула (1) или (1').

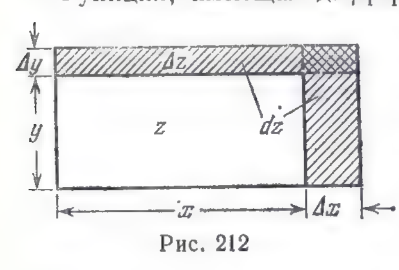


Рис. 212

Заметим, что если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то эта функция непрерывна. Действительно, переходя к пределу в формуле (1') при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

т. е. функция z непрерывна (см. § 2).

Пример. Найти дифференциал функции $z = xy$.

Функцию z можно рассматривать как площадь прямоугольника со сторонами x и y (рис. 212)[1]. Давая сторонам x и y приращения Δx и Δy, получим приращение Δz площади z, представляющее собой площадь «каймы»:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Главная часть этого приращения при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, состоящая из двух прямоугольников со сторонами y, Δx и x, Δy, есть диффе-

[1]) Для наглядности мы считаем x и y положительными.

ренциал dz площади z; поэтому

$$dz = y\,\Delta x + x\,\Delta y.$$

Теорема 1. *Дифференциал функции равен сумме произведений частных производных этой функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных.*

Доказательство. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, т. е. имеет дифференциал

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y. \tag{3}$$

Для определения коэффициентов A и B напишем полное приращение функции

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \tag{4}$$

где α и β — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Полагая $\Delta y = 0$ в формуле (4), получим частное приращение

$$\Delta_x z = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$$

и, следовательно, при $\Delta x \to 0$ будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

Аналогично, полагая $\Delta x = 0$ в формуле (4), находим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Таким образом,

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Подставляя эти значения в формулу (3) и учитывая, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, получим окончательно

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{5}$$

Следствие. *Данная функция имеет* единственный *дифференциал.*

Действительно, из доказательства теоремы 1 следует, что дифференциал функции $z = f(x, y)$, если он существует, обязательно выражается формулой (5).

Замечание. Из формулы (5) следует, что для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y ее дифференциал dz есть функция четырех независимых переменных

x, y, dx, dy, **линейная (т. е. первой степени) относительно второй пары переменных. Первая пара переменных,** x **и** y, **представляет собой координаты точки** $M(x, y)$, **в которой берется дифференциал; вторая пара переменных,** dx **и** dy, **есть координаты вектора смещения точки** $M(x, y)$ **при переходе ее в бесконечно близкую точку** $M'(x+dx, y+dy)$, **где** dx **и** dy**—проекции отрезка** MM' **на соответствующие оси координат** Ox **и** Oy.

Теорема 2 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция* $z=f(x, y)$ *обладает непрерывными частными производными* $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$ *в данной области, то эта функция дифференцируема в этой области и ее дифференциал выражается формулой* (5).

Доказательство. Рассмотрим полное приращение функции

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

Вычитая и прибавляя член $f(x, y+\Delta y)$, будем иметь

$$\Delta z=[f(x+\Delta x, y+\Delta x)-f(x, y+\Delta y)]+ \\ +[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]. \quad (6)$$

Первая квадратная скобка формулы (6) представляет собой приращение функции $f(x, y)$ по переменной x при фиксированном значении $y+\Delta y$ второй переменной y, т. е. ее можно рассматривать как приращение функции одной переменной x. Фиксируя величину $y+\Delta y$ и применяя теорему Лагранжа о конечном приращении функции (гл. XI, § 1), находим

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=\Delta x f'_x(\bar{x}, y+\Delta y), \quad (7)$$

где $\bar{x}$—некоторое промежуточное значение между x и $x+\Delta x$.

Аналогично, вторая квадратная скобка формулы (6) есть приращение функции $f(x, y)$ по переменной y при неизменном значении переменной x. Поэтому в силу теоремы Лагранжа имеем

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)=\Delta y f'_y(x, \bar{y}), \quad (8)$$

где $\bar{y}$—промежуточное значение между y и $y+\Delta y$. Из формул (6), (7) и (8) следует

$$\Delta z=\Delta x f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)+\Delta y f'_y(x, \bar{y}). \quad (9)$$

Пусть $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Так как производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны, то значения их в бесконечно близких точках $P(\bar{x}, y+\Delta y)$ и $M(x, y)$ и соответственно

$Q(x, \bar{y})$ и $M(x, y)$ (рис. 213) отличаются друг от друга на бесконечно малые (§ 2); поэтому

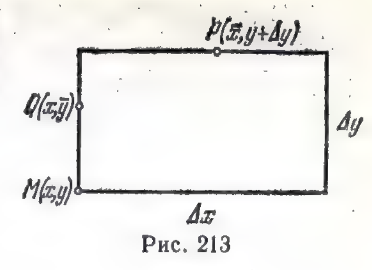


Рис. 213

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha$$

и

$$f'_y(x, \bar{y}) = f'_y(x, y) + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Отсюда, из формулы (9), имеем

$$\Delta z = [f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y] + (\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y). \qquad (10)$$

По определению главная линейная часть полного приращения Δz функции есть дифференциал dz этой функции. Следовательно, из формулы (10) получаем

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y \equiv \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти дифференциал функции $z = x^y$.

Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. Отсюда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy.$$

Замечание. Аналогично, если функция $u = f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, то дифференциал этой функции выражается формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ и $dz = \Delta z$.

Пример 2. Найти дифференциал функции $u = \frac{x}{y} e^z$.

Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{y} e^z$. Следовательно,

$$du = e^z \left(\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy + \frac{x}{y}\,dz\right).$$

При малых приращениях Δx и Δy приращение дифференцируемой функции

$$\Delta f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

приближенно можно заменить дифференциалом $df(x, y)$ этой функции:

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Отсюда имеем приближенное равенство

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

которое будет тем относительно точнее, чем меньше $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$.

Пример 3. Дан прямоугольник со сторонами $x=6$ м и $y=8$ м. На сколько изменится диагональ этого прямоугольника, если сторона x увеличится на 5 см, а сторона y уменьшится на 10 см?

Обозначая диагональ прямоугольника через u, имеем $u = \sqrt{x^2+y^2}$.

Отсюда, заменяя приращение Δx диагонали дифференциалом du этой диагонали, приближенно находим

$$\Delta u \approx du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Полагая в последней формуле $x=6$ м, $\Delta x = 0{,}05$ м; $y=8$ м, $\Delta y = -0{,}10$ м, получим

$$\Delta u \approx \frac{6\cdot 0{,}05 + 8\cdot(-0{,}10)}{\sqrt{36+64}} \text{ м} = -0{,}05 \text{ м}.$$

Таким образом, диагональ прямоугольника уменьшится приблизительно на 5 см. Точный подсчет дает значение $\Delta u = -0{,}045$ м.

§ 5. Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям

С помощью полного дифференциала функции можно выяснить, как отражаются на значении функции погрешности ее аргументов.

Задача. Определить предельную абсолютную погрешность Δ_z функции

$$z = f(x, y),$$

зная предельные абсолютные погрешности Δ_x и Δ_y аргументов x, y:

$$|\Delta x| \leqslant \Delta_x \quad \text{и} \quad |\Delta y| \leqslant \Delta_y.$$

Имеем

$$|\Delta z| = |f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)|.$$

Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим

$$|\Delta z| \approx |f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y|.$$

Отсюда выводим приближенную оценку:

$$|\Delta z| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| |\Delta y|.$$

Следовательно, за предельную абсолютную погрешность функции z можно принять

$$\Delta_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \Delta_y. \qquad (1)$$

Пример. Гипотенуза прямоугольного треугольника $x = 120$ м $\pm$ 2 м, а острый угол $y = 30^\circ \pm 1^\circ$. С какой точностью можно найти противолежащий данному углу катет z этого треугольника?

Имеем

$$z = x \sin y. \qquad (2)$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y.$$

Полагая $x = 120$, $\Delta_x = 2$ и $y = \frac{\pi}{6}$, $\Delta_y = \frac{\pi}{180}$, по формулам (2) и (1) находим

$$z = 120 \sin 30^\circ = 60 \text{ (м)}$$

и

$$\Delta_z = \sin 30^\circ \cdot 2 + 120 \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 1{,}8 = 2{,}8 \text{ (м)}.$$

Следовательно,

$$z = 60 \text{ м} \pm 2{,}8 \text{ м}.$$

Используя формулу (1), можно определить также предельную относительную погрешность функции:

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{|z|}.$$

В частности, положим

$$z = xy \quad (x \neq 0,\ y \neq 0).$$

Тогда $\Delta_z = |y|\,\Delta_x + |x|\,\Delta_y$ и, следовательно,

$$\delta_z = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|}, \quad \text{или} \quad \delta_z = \delta_x + \delta_y,$$

т. е. *предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.*

§ 6. Понятие о производной функции по данному направлению

Пусть $u=f(x, y)$ — функция, определенная в области ω. Рассмотрим некоторую точку $M(x, y)\in\omega$ и некоторое направление l, определяемое направляющими косинусами $\cos\alpha$ и $\cos\beta=\sin\alpha$ (т. е. $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — косинусы углов, образованных лучом l с положительными направлениями осей координат Ox и Oy). При перемещении в данном направлении l точки $M(x, y)$ в точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)\in\omega$ функция $u=f(x, y)$ получает приращение

$$\Delta_l u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y), \tag{1}$$

которое называется *приращением функции u в данном направлении l* (рис. 214). Если $MM'=\Delta l$ есть величина

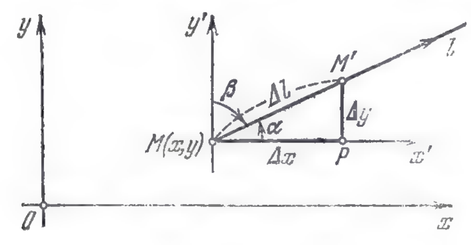


Рис. 214

перемещения точки M, то из прямоугольного треугольника MPM' получаем

$$\Delta x=\Delta l\cdot\cos\alpha,\quad \Delta y=\Delta l\cdot\cos\beta, \tag{2}$$

следовательно,

$$\Delta_l u=f(x+\Delta l\cos\alpha,\ y+\Delta l\cos\beta)-f(x, y).$$

Определение. *Под производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции u в данном направлении l понимается предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения при условии, что последняя стремится к нулю*, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \tag{3}$$

С этой точки зрения производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ можно рассматривать как производные функции u в положительных направлениях осей координат Ox и Oy.

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ дает **скорость изменения функции в направлении** l.

Выведем формулу для производной $\frac{\partial u}{\partial l}$, предполагая, что функция $u=f(x, y)$ дифференцируема. Из определения дифференциала функции следует, что приращение функции отличается от дифференциала функции на величину высшего порядка малости относительно приращений независимых переменных. Поэтому, используя формулу полного дифференциала (§ 4, (5)) будем иметь

$$\Delta_l u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

где $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Отсюда в силу соотношений (2) получаем

$$\Delta_l u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l+(\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta)\Delta l.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta.$$

Переходя к пределу в последней формуле при $\Delta l\to 0$, т. е. при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, и основываясь на определении (3), получим искомую формулу для производной функции в данном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \qquad (4)$$

где $\cos\beta=\sin\alpha$.

Пример 1. Найти приращение функции $u=x^2+2xy-y^2$ при перемещении точки $M(1, 2)$ в направлении l, образующем угол $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ с положительным направлением оси Ox, на расстояние $\Delta l=0{,}1$. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке M?

Имеем $\operatorname{tg}\alpha=3/4$, причем $0<\alpha<\pi/2$. Отсюда $\sec\alpha=$ $=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$, следовательно,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}.$$

Используя полученные направляющие косинусы $\cos\alpha=4/5$ и $\cos\beta=3/5$ направления l, находим для точки M приращения координат

$$\Delta x=\Delta l\cdot\cos\alpha=0{,}1\cdot\frac{4}{5}=0{,}08 \quad \text{и} \quad \Delta y=\Delta l\cdot\cos\beta=0{,}1\cdot\frac{3}{5}=0{,}06.$$

Таким образом, перемещенная точка M' имеет координаты

$$x_1 = x + \Delta x = 1 + 0{,}08 = 1{,}08 \text{ и } y_1 = y + \Delta y = 2 + 0{,}06 = 2{,}06.$$

Отсюда искомое приращение функции u равно

$$\Delta_l u = (1{,}08^2 + 2\cdot 1{,}08\cdot 2{,}06 - 2{,}06^2) - (1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2^2) = \\ = 1{,}3724 - 1 = 0{,}3724.$$

Заметим, что $\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l} \approx 3{,}7.$

Далее, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y;$$

поэтому $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 6$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -2$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \cos\beta = 6\cdot\frac{4}{5} + (-2)\cdot\frac{3}{5} = 3{,}6.$$

Замечание. Для функции $u = f(x, y, z)$ ее производная в направлении l, определяемым вектором $\boldsymbol{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

§ 7. Градиент

Определение 1. *Говорят, что в данной области* ω[1]) *определено* ***скалярное поле****, если для каждой точки* $M \in \omega$ *задан некоторый скаляр* (т. е. число)

$$u = f(M). \qquad (1)$$

Таким образом, u есть числовая функция точки.

Примерами скалярных полей являются: температурное поле, т. е. распределение температуры в нагретом теле; распределение концентрации вещества в растворе, и т. п.

Если область ω расположена на плоскости Oxy, то любая ее точка M определяется двумя координатами (x, y), и плоское скалярное поле (1) может быть записано в виде

$$u = f(x, y) \quad ((x, y) \in \omega). \qquad (2)$$

Аналогично, для области ω, находящейся в пространстве $Oxyz$, мы будем иметь

$$u = f(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \omega).$$

[1]) По установившейся традиции здесь слово «область» служит синонимом слова «множество». Точное определение понятия «область» см. в § 11.

Таким образом, понятие скалярного поля представляет собой физическую трактовку функции нескольких переменных.

Определение 2. *Говорят, что в данной области* ω *определено векторное поле, если для каждой точки* $M \in \omega$ *задан некоторый вектор*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(M). \quad (3)$$

Примерами векторных полей являются: поле скоростей в данный момент времени точек потока жидкости; силовое поле, создаваемое некоторым притягивающим центром, и т. п.

Для случая плоского векторного поля (3) ($\omega \in Oxy$) мы будем иметь вектор-функцию

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(x, y) \qquad ((x, y) \in \omega). \quad (4)$$

Отсюда, переходя к координатам вектора $\boldsymbol{a}$, получим

$$a_x = F_1(x, y), \quad a_y = F_2(x, y). \quad (5)$$

Таким образом, задание плоского векторного поля (4) равносильно заданию двух скалярных полей (5).

Аналогично, для случая пространственного векторного поля ($\omega \in Oxyz$) получаем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(x, y, z), \quad (6)$$

или же, в координатах,

$$a_x = F_1(x, y, z), \quad a_y = F_2(x, y, z), \quad a_z = F_3(x, y, z). \quad (7)$$

Итак, векторное поле (6) эквивалентно трем скалярным полям (7). Этим объясняется удобство векторного языка: он позволяет в одной векторной формуле записывать несколько скалярных соотношений.

Множество всех точек M, для которых скалярное поле (1) сохраняет постоянное значение

$$f(M) = \text{const},$$

называется *поверхностью* (или *линией*) *уровня* скалярного поля (*изоповерхности*) (см. § 1).

Определение 3. *Пусть*

$$u = f(x, y) \quad (8)$$

— дифференцируемое плоское скалярное поле[1]). *Тогда*

---

[1]) То есть $f(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных.

вектор

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \tag{9}$$

называется *градиентом поля*; или подробнее

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы, направленные по осям координат Ox и Oy (координатные орты).

Аналогично, для пространственного скалярного поля

$$u = f(x, y, z) \tag{8'}$$

его градиент есть вектор

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \tag{9'}$$

Таким образом, скалярное поле порождает векторное поле — поле градиентов.

Под производной скалярного поля (8′) в данном направлении l понимается выражение (см. § 6)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{10}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$ данного направления. Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ представляет собой скорость изменения поля в данном направлении.

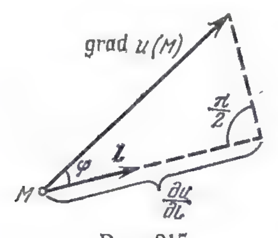


Рис. 215

Теорема 1. *Производная скалярного поля в данном направлении равна проекции градиента поля на данное направление* (*в соответствующей точке*).

Доказательство. Обозначим через $\boldsymbol{l}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ *единичный вектор направления* l. Тогда, учитывая формулу (9′) и вспоминая определение скалярного произведения (гл. XVIII, § 12), выражение (10) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l}_0 = |\operatorname{grad} u|\,|\boldsymbol{l}_0|\cos\varphi = |\operatorname{grad} u|\cos\varphi, \tag{11}$$

где $\varphi = \angle(\operatorname{grad} u, \boldsymbol{l})$ (рис. 215).

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_{l} \operatorname{grad} u. \tag{12}$$

Следствие. *Градиент скалярного поля в данной точке по величине и направлению равен максимальной скорости изменения поля в этой точке.*

Действительно, из формулы (11) получаем, что

$$\max_{l} \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u|,$$

и при этом $\cos\varphi = 1$. Отсюда находим, что $\varphi = 0$ и, следовательно, направление вектора $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^*$ должно совпадать с направлением $\operatorname{grad} u$, т. е. $\boldsymbol{l}^* = k \operatorname{grad} u$, где $k > 0$. Кроме того, для этого направления имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (13)$$

Замечание. Из следствия вытекает, что градиент поля не зависит от выбора прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Пример. Найти величину и направление градиента поля $u = \frac{x}{y} + z^2$ в точке $M_0(2, 1, 0)$.

Имеем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{1}{y}\right)_{M_0} = 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)_{M_0} = -2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = (2z)_{M_0} = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}.$$

Отсюда

$$|\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{5} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = 0.$$

Точка M_0, в которой $\operatorname{grad} u(M_0) = 0$, называется *особой* для скалярного поля; в противном случае точка M_0 называется *неособой* (*обыкновенной*).

Приведем без доказательства теорему, выясняющую направление градиента скалярного поля.

Теорема 2. *Во всякой неособой точке плоского скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.*

§ 8. Частные производные высших порядков

Пусть имеем некоторую функцию $z=f(x, y)$ от двух переменных x и y. Ее частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$$

являются функциями от переменных x и y. В некоторых случаях для этих функций существуют снова частные производные, называемые *частными производными второго порядка* (или просто *вторыми частными производными*):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x, y).$$

Продолжая таким путем дальше, мы можем определить *частные производные третьего порядка* (*третьи частные производные*) и т. д.

Аналогично определяются и записываются частные производные высших порядков от функции трех и большего числа переменных.

Можно доказать следующую теорему: *если все входящие в вычисления частные производные, рассматриваемые как функции своих независимых переменных, непрерывны, то результат частного дифференцирования не зависит от последовательности дифференцирования.*

В частности, например, если производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ непрерывны, то имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Не приводя доказательство в общем виде, проверим справедливость этого последнего утверждения на отдельных примерах.

Пример. Пусть $z=x^y$ $(x>0)$.
Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}.$$

Мы видим, что для данной функции z соблюдается равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},$$

как и следовало ожидать.

§ 9. Признак полного дифференциала

Если функция $u=f(x, y)$ дифференцируема, то полный дифференциал ее имеет вид (§ 4, формула (5))

$$du=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy, \tag{1}$$

где

$$P(x, y)=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad Q(x, y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Возникает обратная задача: при каких условиях дифференциальное выражение

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy, \tag{3}$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка, является полным дифференциалом некоторой функции u?

Необходимое условие полного дифференциала дается следующей теоремой.

Теорема. *Для того чтобы дифференциальное выражение* (3) *являлось в области G полным дифференциалом некоторой функции $u=F(x, y)$, необходимо, чтобы в этой области тождественно было выполнено условие*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y} \quad ((x, y)\in G) \tag{α}$$

(условие полного дифференциала).

Доказательство. Пусть (3) — полный дифференциал функции $u=F(x, y)$. Имеем

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{4}$$

Отсюда в силу единственности дифференциала (§ 4, теорема 1, следствие) получим

$$P(x, y)=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Дифференцируя первое равенство (5) по y, а второе — по x, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}. \tag{6}$$

Так как для непрерывных смешанных производных результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, то из (6) получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

т. е. условие (α) выполнено.

Следствие. *Если условие* (α) *не выполнено, то выражение* $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ *не является в области* G *полным дифференциалом некоторой функции.*

Замечание. Можно доказать, что для конечной или бесконечной прямоугольной области

$$G = \{a < x < b;\ A < y < B\}$$

выполнение условия (α) также и достаточно для существования функции u такой, что

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du.$$

Пример. Являются ли выражения

$$y\,dx - x\,dy \quad \text{и} \quad y\,dx + x\,dy$$

полными дифференциалами некоторых функций?

Для первого выражения имеем $P = y$, $Q = -x$. Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

и, следовательно, условие полного дифференциала не выполнено, т. е. не существует функции, полный дифференциал которой равен $y\,dx - x\,dy$.

Для второго выражения получаем $P = y$, $Q = x$ и, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

Условие полного дифференциала выполнено. Так как плоскость можно рассматривать как бесконечную прямоугольную область, то $y\,dx + x\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции. Действительно,

$$y\,dx + x\,dy = d(xy).$$

§ 10. Максимум и минимум функции нескольких переменных

Напомним, что (см. гл. VII, § 3) под *окрестностью точки* плоскости понимается внутренность любого прямоугольника, окружающего эту точку, исключая саму точку (проколотая окрестность).

Аналогично, под окрестностью точки пространства понимается внутренность произвольного параллелепипеда, содержащего эту точку, за вычетом самой точки.

Определение. *Максимумом* (*строгим*) *функции* $f(x, y)$ *называется такое значение* $f(x_1, y_1)$ *этой функции, которое больше всех ее значений* $f(x, y)$, *принимаемых данной функцией в точках некоторой окрестности точки*

(x_1, y_1)[1]. (Эта окрестность может быть весьма малой по своим линейным размерам.)

Аналогично, ***минимумом*** *(строгим) функции $f(x, y)$ называется такое значение $f(x_2, y_2)$ этой функции, которое меньше всех ее значений $f(x, y)$, принимаемых данной функцией в точках некоторой окрестности точки (x_2, y_2).*

Максимум или минимум функции $f(x, y)$ называется *экстремумом* этой функции, а точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума* (соответственно *точкой максимума* или *точкой минимума* функции).

Аналогично определяется экстремум функции $f(x, y, z)$, и т. д.

Укажем необходимый признак экстремума функции нескольких переменных.

Теорема. *В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная первого порядка либо равна нулю, либо не существует.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты функцию двух переменных $u = f(x, y)$, и пусть $f(x_0, y_0)$ — ее максимум (рассуждения для минимума функции аналогичны).

Зафиксируем одну из переменных, например y, полагая $y = y_0$. Тогда получим функцию одной переменной

$$u_1 = f(x, y_0);$$

которая, очевидно, будет иметь максимум при $x = x_0$. Отсюда на основании теории экстремума функции одной переменной (гл. XI, § 7) получаем, что

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = 0$$

или $f'_x(x_0, y_0)$ не существует.

Совершенно так же доказывается, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$ или $f'_y(x_0, y_0)$ не существует.

Следствие. *В точке экстремума $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемой функции $f(x, y)$ выполнены равенства*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \ f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Аналогично, если дифференцируемая функция $f(x, y, z)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

[1]) По смыслу определения функция $f(x, y)$ должна иметь смысл на некотором множестве точек этой окрестности.

Замечание 1. Точку, в которой частные производные первого порядка некоторой функции либо равны нулю, либо не существуют, назовем *критической* для данной функции.

Тогда теорема эквивалентна утверждению: *экстремумы функции нескольких переменных могут достигаться лишь в критических точках ее.*

Замечание 2. Выведенные выше условия экстремума функции, вообще говоря, не являются достаточными, т. е. если, например, в некоторой точке все частные производные первого порядка функции равны нулю, то в этой точке функция не обязательно имеет экстремум.

Пример 1. Для функции $f(x, y)=xy$ имеем

$$f'_x(x, y)=y, \quad f'_y(x, y)=x.$$

Следовательно, $f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0$.

Однако точка $O(0, 0)$ не является точкой экстремума функции, так как в любой окрестности точки O имеются точки $A(\varepsilon, \varepsilon)$ и $B(-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ произвольно) такие, что

$$f(A)=\varepsilon^2>0=f(0) \text{ и } f(B)=-\varepsilon^2<f(0).$$

Пример 2. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму трех измерений, равную данной положительной величине a, найти тот, объем которого наибольший.

Обозначим измерения рассматриваемого прямоугольного параллелепипеда через x, y и z ($x>0$, $y>0$, $z>0$). Его объем V выразится так: $V=xyz$. Кроме того, согласно условию задачи имеем

$$x+y+z=a.$$

Выразив z через x и y из последнего уравнения и подставив это значение z в выражение для V, получим

$$V=xy(a-x-y),$$

где переменные x и y являются независимыми.

Возьмем частные производные от V по x и y:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=ay-2xy-y^2, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=ax-x^2-2xy.$$

Приравняв эти частные производные нулю, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} ay-2xy-y^2=0, \\ ax-x^2-2xy=0. \end{aligned}\right\}$$

Так как для искомого параллелепипеда величины x и y заведомо не равны нулю, то мы можем наши уравнения сократить на них. После простых преобразований получим систему

$$\left.\begin{aligned} 2x+y=a, \\ x+2y=a. \end{aligned}\right\}$$

Решая обычным методом эту систему, находим $x=a/3$ и $y=a/3$. Следовательно, также $z=a/3$.

Итак, искомый параллелепипед есть куб, ребро которого равно $a/3$ (можно строго доказать, что объем его при данных условиях наибольший).

§ 11. Абсолютный экстремум функции

Рассмотрим некоторое множество G точек плоскости (или пространства).

Точка M называется *внутренней* для множества G, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью (рис. 216).

Точка N называется *граничной* для множества G, если в любой ее полной окрестности имеются точки, как принадлежащие G, так и не принадлежащие ему (рис. 216). Сама точка N не обязательно принадлежит множеству G.

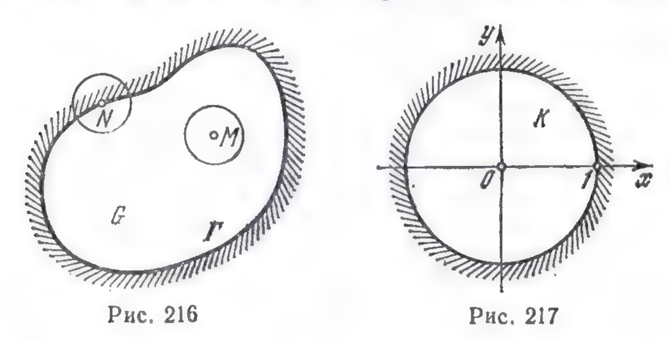


Рис. 216 Рис. 217

Совокупность всех граничных точек множества G называется его *границей* Г.

Определение 1. *Множество G будем называть областью, если все его точки — внутренние*[1]).

Множество G с присоединенной границей Г, т. е. множество $\overline{G} = G \cup \Gamma$, называется *замкнутой областью.*

Область называется *ограниченной*, если она целиком содержится внутри круга (или шара) достаточно большого радиуса.

Пример 1. Внутренность K круга (рис. 217)

$$x^2 + y^2 < 1$$

есть область; граница ее — окружность $x^2 + y^2 = 1$; круг с присоединенной границей, т. е. совокупность точек, для которых $x^2 + y^2 \leqslant 1$, — замкнутая область.

Определение 2. *Наименьшее или наибольшее значение функции* ***в данной области называется абсолютным экстремумом функции*** (соответственно *абсолютным минимумом* или *абсолютным максимумом*) *в этой области.*

---

[1]) Обычно такое множество называется *открытым*.

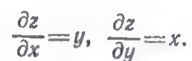
Имеет место **теорема Вейерштрасса**: *функция, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, достигает в этой области своего наименьшего и своего наибольшего значений.*

Теорема. *Абсолютный экстремум функции в данной области достигается либо в критической точке функции, принадлежащей этой области, либо в граничной точке области.*

Рис. 218

Пример 2. Найти абсолютный экстремум функции $z=xy$ в треугольной области S с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ (рис. 218).

Имеем



$$\frac{\partial z}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

Отсюда находим критическую точку $O(0, 0)$ с координатами $x=0$, $y=0$, принадлежащую области S.

Изучим поведение функции z на границе $\Gamma=OABO$ области S.

На участке OA имеем $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. Поэтому $z=0$. Аналогично, на участке OB: $x=0$ $(0\leqslant y\leqslant 2)$ получаем $z=0$.

Наконец, отрезок AB имеет уравнение $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$, или $y=2-2x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. Отсюда

$$z=xy=2x-2x^2.$$

Имеем

$$\frac{dz}{dx}=2-4x=0$$

при $x=1/2$, отсюда $y=1$. Так как

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-4<0,$$

то в точке $D(1/2, 1)$ функция z достигает своего наибольшего значения $M=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ на отрезке AB.

Итак, наименьшее значение функции z в области S есть $m=0$ и оно реализуется в точках отрезков OA и OB, составляющих часть границы Γ области S; наибольшее ее значение $M=1/2$ достигается в точке $D(1/2, 1)$, принадлежащей отрезку AB границы Γ.

§ 12. Построение эмпирических формул по способу наименьших квадратов

В естествознании, в частности в физических и биологических науках, приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основании опыта и наблю-

дения. Один из наилучших методов получения таких формул — это **способ наименьших квадратов**. Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаем линейной зависимости двух величин.

Пусть мы хотим установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением прямолинейного металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты сопоставляем в таблице:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки с соответствующими координатами, взятыми из нашей таблицы, почти лежат на некоторой прямой линии, например, располагаются так, как показано на рис. 219. Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближенная **линейная зависимость**, т. е. что y есть линейная функция от x, выражающаяся формулой

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

где a и b — некоторые постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Формула (1) может быть представлена в таком виде:

$$ax + b - y = 0. \qquad (2)$$

Рис. 219

Так как точки (x, y) только приблизительно лежат на нашей прямой, то формулы (1) и (2) приближенные. Следовательно, подставляя в формулу (2) вместо x и y их значения x_1, y_1; x_2, y_2; ...; x_n, y_n, взятые из предыдущей таблицы, мы получим равенства:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

где

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots, \ \varepsilon_n \tag{4}$$

— некоторые числа, вообще говоря, не равные нулю, которые мы будем называть *погрешностями*.

Требуется подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы эти погрешности были по возможности малыми по абсолютной величине[1]). *Способ наименьших квадратов* состоит в следующем: нужно подобрать коэффициенты a и b так, чтобы сумма квадратов погрешностей была возможно меньшей, т. е. потребуем, чтобы сумма

$$U = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ \ldots \ + \varepsilon_n^2 \tag{5}$$

была наименьшей. Если эта минимальная сумма квадратов окажется малой, то тогда и сами погрешности будут малыми по абсолютной величине.

Примечание. Можно было бы попытаться вместо суммы квадратов погрешностей взять сумму их и искать коэффициенты a и b так, чтобы эта сумма была возможно малой по абсолютной величине. Однако это, очевидно, не обеспечит малости погрешностей, так как последние могут иметь различные знаки. Этого не может случиться, если задача решается методом наименьших квадратов.

Заменяя в выражении (5) числа (4) их значениями из равенств (3), получим такую величину:

$$U = (ax_1 + b - y_1)^2 + \\ + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ \ldots \ + (ax_n + b - y_n)^2. \tag{6}$$

В формуле (6) числа $x_1, \ y_1, \ x_2, \ y_2, \ \ldots, \ x_n, \ y_n$ получены в результате измерений, и они рассматриваются как данные; коэффициенты же a и b — неизвестные величины, подлежащие определению.

Итак, U можно рассматривать как функцию от двух переменных a и b. Подберем коэффициенты a и b так, чтобы функция U получила возможно меньшее значение. Согласно предыдущему параграфу для этого необходимо, чтобы соблюдались условия

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \ \ \frac{\partial U}{\partial b} = 0.$$

---

[1]) Эта задача является простейшим частным случаем общей проблемы «о наилучшем приближении функций», поставленной и в весьма широких условиях решенной знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым.

Беря эти частные производные и для удобства выкладок снабжая их коэффициентом 1/2, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial a}=(ax_1+b-y_1)\,x_1+(ax_2+b-y_2)\,x_2+\ldots$$
$$\ldots+(ax_n+b-y_n)\,x_n,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial b}=(ax_1+b-y_1)+(ax_2+b-y_2)+\ \ldots\ +(ax_n+b-y_n).$$

Отсюда, приравнивая эти частные производные нулю, получим линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\left.\begin{aligned}(ax_1+b-y_1)\,x_1+(ax_2+b-y_2)\,x_2+\ldots+(ax_n+b-y_n)\,x_n=0,\\ (ax_1+b-y_1)+(ax_2+b-y_2)+\ldots+(ax_n+b-y_n)=0.\end{aligned}\right\}$$

Производя обычные алгебраические преобразования, представим эту систему в более простом виде:

$$a\,(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+b\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)=$$
$$=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,$$
$$a\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)+b\cdot n=y_1+y_2+\ldots+y_n,$$

или, введя сокращенные обозначения, имеем

$$\left.\begin{aligned}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Это — окончательный вид так называемой *нормальной системы* способа наименьших квадратов. Из этой системы мы находим a и b, а затем подставляем их в нашу эмпирическую формулу

$$y=ax+b.$$

Пример. Пусть результаты измерений величин x и y и итоги обработки их занесены в следующую таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	ε_i
1	−2	0,5	4	−1,0	−0,175
2	0	1	0	0	0,175
3	1	1,5	1	1,5	0,100
4	2	2	4	4	0,025
5	4	3	16	12	−0,125
Σ	5	8,0	25	16,5	0

Положим

$$y = ax + b.$$

Нормальная система (7) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} 25a + 5b &= 16,5 \\ 5a + 5b &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти уравнения, получим $a = 0,425$, $b = 1,175$. Отсюда

$$y = 0,425x + 1,175.$$

В последнем столбце таблицы даны соответствующие погрешности.

Упражнения

1. Определить области существования функций:

а) $u = x\sqrt{1-y^2}$; б) $u = \sqrt{x^2+y^2-1}$; в) $u = \ln(x+y)$.

2. Построить линии уровня следующих функций:

а) $z = x - y$; б) $z = \dfrac{y}{x}$; в) $z = x^2 - y^2$; г) $z = y - x^2$.

3. Построить поверхности уровня функций:
а) $u = x + y + z$; б) $u = y^2 + z^2$.

4. Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал от следующих функций:

а) $u = x^2 - 2xy - y^2$; б) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; в) $u = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

5. Найти производную $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ функции $u = 2x/\sqrt{y}$ в точке $M_0(1, 1)$ в направлении l, образующем угол α с осью Ox, если $\alpha = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$, 2π.

Чему равен $|\operatorname{grad} u(M_0)|$?

6. Изотермы температуры u имеют вид $x^2 + y^2 = C$. Зная, что для изотермы, проходящей через точку $A(3, 4)$, значение функции $u = 30$ °С, а для изотермы, проходящей через точку $B(5, 1)$, значение функции $u = 35$ °С, приближенно найти $|\operatorname{grad} u(A)|$, если линейные расстояния даны в км.

7. Найти производные второго порядка от функций:

а) $u = x\ln y + \sqrt{\sin x}$; б) $u = \dfrac{xy}{z^2}$; в) $u = \ln(x+y^2)$; г) $u = \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} y$; д) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

8. Проверить, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, если $u = x\arcsin\sqrt{x/y}$.

9. Масса тела в воздухе $m = 0,52$ кг $+ 0,02$ кг, а масса тела в воде $m_1 = 0,31$ кг $+ 0,01$ кг. С какой точностью можно определить плотность тела?

10. Выяснить, какие из данных выражений являются полными дифференциалами:

а) $dx + y\,dy$, б) $\dfrac{dx}{y^2} - \dfrac{2x\,dy}{y^3}$ $(y > 0)$, в) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

11. При каком условии сумма трех положительных слагаемых x, y и z будет наименьшей, если произведение этих слагаемых есть величина постоянная, равная a?

12. В полушар радиуса a вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

13. В прямой круговой конус, радиус основания которого есть r, а высота h, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

14. Результаты измерения величин x и y даются следующей таблицей:

x	10	20	30	40	50	60
y	150	100	40	0	—60	—100

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость

$$y = ax + b,$$

способом наименьших квадратов определить коэффициенты a и b.

15. Параболу $y = x^2$ на участке $2 \leqslant x \leqslant 4$ приближенно заменить прямой $Y = kx + b$ так, чтобы «средняя квадратичная ошибка» $\omega = \int\limits_2^4 (y - Y)^2\,dx$ была наименьшей.

16. Найти абсолютный экстремум функции $u = 3x + 4y + 5$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Указание. Использовать параметрические уравнения границы области.

ГЛАВА XXI
РЯДЫ

§ 1. Примеры бесконечных рядов

В настоящей главе мы займемся изучением свойств **бесконечных рядов**, а также **разложением функций в степенные и тригонометрические ряды**.

Примером бесконечного ряда, который рассматривается в элементарной алгебре, является бесконечно убывающая геометрическая прогрессия[1])

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \qquad (1)$$

где $|q| < 1$. Здесь каждый следующий член образован из предыдущего по определенному закону, а именно: каждый следующий член получается из предыдущего посредством умножения его на знаменатель прогрессии q. Следовательно, n-й член, так называемый *общий член* прогрессии, выражается формулой

$$u_n = aq^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Другой пример бесконечного ряда представляет *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \qquad (2)$$

n-й член которого равен $u_n = \frac{1}{n}$.

Существуют также ряды, составленные из функций, например,

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots, \qquad (3)$$

---

[1]) Точнее было бы сказать — ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В дальнейшем мы для краткости ряд вида (1) будем называть просто «геометрической прогрессией».

где n-й член равен

$$u_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{x^n}{n!}\ ^{1)}.$$

Закон образования членов ряда дается его n-м членом, который называется общим членом ряда. Имея формулу общего члена ряда, можно найти любой член этого ряда.

Возникает задача: исследовать свойства бесконечного ряда, предполагая, что n-й член его известен.

Заметим, что теория рядов имеет большие практические применения ввиду возможности при широких условиях представления данной функции в виде бесконечного ряда более простых функций, например, ряда многочленов, что позволяет легко приближенно находить значения функции для данного значения аргумента.

§ 2. Сходимость ряда

Дадим общее понятие бесконечного ряда. Пусть имеем некоторую составленную по определенному закону бесконечную последовательность чисел или функций, чисто формально соединенных между собой знаком плюс:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (1)$$

Такое выражение называется *бесконечным рядом* или просто *рядом*, а слагаемые u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... называются *членами* этого ряда. Если члены ряда — числа, то ряд называется *числовым*; если же они являются функциями, то ряд называется *функциональным*.

Заметим, что изучение функциональных рядов сводится к изучению числовых. В самом деле, если

$$u_n = f_n(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

то для каждого фиксированного значения аргумента x мы получаем соответствующий числовой ряд (1), свойства которого и нужно исследовать.

Член u_n ряда (1), стоящий на n-м месте, считая от начала, называется *общим членом* этого ряда. Ряд (1) счи-

---

[1]) Сокращенная запись $n!$ (читается: «n факториал») обозначает произведение всех натуральных чисел, не превышающих числа n.

тается заданным, если известен общий член его, выраженный как функция номера n. Таковы, например, ряды (1), (2) и (3) из § 1, где соответственно

$$u_n = aq^{n-1}, \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Считая, что ряд (1) задан, мы можем образовать *частичные суммы* этого ряда, т. е.

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1, \\ &S_2 = u_1 + u_2, \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots\dots\dots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n. \end{aligned}$$

Предположим сначала, что ряд (1) числовой. Рассмотрим два случая.

I. Пусть при неограниченном возрастании номера n сумма n первых членов S_n ряда (1) стремится к конечному пределу S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Тогда говорят, что ряд (1) *сходится* и число S называют *суммой* этого ряда.

II. Пусть при неограниченном возрастании номера n сумма n первых членов S_n ряда (1) возрастает неограниченно или вообще не стремится ни к какому пределу. Тогда говорят, что ряд (1) *расходится* и суммы не имеет.

Определение. *Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм — этот предел называется суммой ряда; в противном случае ряд называется расходящимся.*

Если ряд (1) функциональный, т. е.

$$u_n = f_n(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ \dots),$$

то для каждого фиксированного значения x_0 аргумента x соответствующий числовой ряд

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots \tag{1'}$$

или сходится, или расходится. Соответственно этому x_0 называется или *точкой сходимости*, или *точкой расходимости* данного функционального ряда, а совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости* его.

Если $u_n = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и функциональный ряд (1) сходится в каждой точке x некоторого множества, то он называется *сходящимся на этом множестве*, а функция $S = S(x)$, определяемая для каждого рассматриваемого значения x формулой

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n(x),$$

называется *суммой этого ряда* на данном множестве.

Если ряд (1) сходится, то разность между суммой S и частичной суммой S_n его

$$R_n = S - S_n$$

называется *n-м остатком ряда*. Остаток R_n ряда представляет собой ту погрешность, которая получится, если в качестве приближенного значения суммы ряда S взять сумму S_n первых n членов этого ряда.

Так как S есть предел последовательности S_n, то, очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} (S - S_n) = 0.$$

Поэтому, *взяв достаточно большое число членов сходящегося ряда, можно сумму этого ряда вычислить с любой степенью точности.*

Отсюда ясно, что первой основной задачей теории рядов является исследование сходимости ряда. Задача о нахождении суммы сходящегося ряда имеет второстепенное значение, так как, после того как установлена сходимость ряда, сумма его в большинстве практически важных случаев приближенно легко может быть найдена.

Поясним понятия сходимости и расходимости рядов на примерах.

Пример 1. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \qquad (2)$$

где $a \neq 0$.

Известно, что S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии — выражается формулой

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Здесь приходится рассматривать отдельно четыре случая.

1) Пусть $|q| < 1$. Тогда q^n при неограниченном возрастании n стремится к нулю и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

В этом случае ряд (2) сходится, и его сумма равна $S = \frac{a}{1-q}$.

2) Пусть $|q|>1$. Тогда при неограниченном возрастании n степень q^n возрастает неограниченно по абсолютной величине, и следовательно, возрастает неограниченно сумма n первых членов S_n. Поэтому ряд (2) в этом случае расходится и не имеет суммы.

3) Пусть $q=1$. Тогда ряд (2) принимает такой вид:

$$a+a+\ldots+a+\ldots \quad (a\neq 0).$$

Легко видеть, что $S_n=na$ и, следовательно, при неограниченном возрастании n сумма S_n возрастает неограниченно. Поэтому ряд (2) в этом случае расходится.

4) Пусть $q=-1$. В этом случае ряд (2) принимает вид

$$a-a+a-a+\ldots+(-1)^{n-1}a+\ldots$$

Величина S_n будет равна нулю или a в зависимости от того, будет ли n четно или нечетно. Ясно, что S_n при $a\neq 0$ не стремится ни к какому пределу при неограниченном возрастании n. Ряд (2) в этом случае расходится.

Следовательно, *бесконечная геометрическая прогрессия* (2) *сходится тогда и только тогда, когда абсолютная величина знаменателя ее меньше единицы*: $|q|<1$.

Пример 2. Пусть имеем ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \tag{3}$$

Покажем, что этот ряд сходится. Возьмем сумму первых n членов его:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Легко видеть, что отдельные слагаемые могут быть представлены так:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Отсюда $S_n=1-\frac{1}{n+1}$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1.$$

Таким образом, ряд (3) сходится, и сумма его равна 1.

Дальнейшие свойства рядов относятся к числовым рядам, если явно не оговорено противное.

Укажем теперь некоторые элементарные свойства рядов.

Теорема 1. *Сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *не нарушится, если все члены его умножить на одно и то же число k, отличное от нуля, причем для сумм этих рядов выполнено равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из перехода к пределу при $N \to \infty$ в равенстве $\sum_{n=1}^{N} ku_n = k\sum_{n=1}^{N} u_n$.

Под *суммой* (*разностью*) двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ понимается соответственно ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n).$$

Теорема 2. *Сумма* (*разность*) *двух сходящихся рядов есть ряд сходящийся, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \qquad (4)$$

Действительно, так как $\sum_{n=1}^{N} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{N} u_n \pm \sum_{n=1}^{N} v_n$ для любого конечного N, то при $N \to \infty$ в пределе получим равенство (4).

§ 3. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots$$

сходится, то его n-й член u_n при неограниченном возрастании номера n стремится к нулю.

Доказательство. Мы имеем

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

и

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Отсюда

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Так как данный ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если n-й член ряда при неограниченном возрастании его номера n не стремится к нулю, то этот ряд расходится.*

Доказанный необходимый признак сходимости ряда, вообще говоря, не является достаточным. Можно привести примеры рядов, у которых общий член u_n стремится к нулю при $n \to \infty$, а ряд тем не менее расходится.

Пример. Рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (1)$$

Общий член этого ряда $u_n = \frac{1}{n}$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Тем не менее покажем, что ряд (1) расходится. Для этого возьмем сумму 2^m первых членов ряда (1) и сгруппируем эти члены следующим образом:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2\ \text{члена}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2\ \text{члена}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{2^3\ \text{членов}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}\ \text{членов}}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} >$$

$$> \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2},$$

. . . .

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m} > \underbrace{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-1}\ \text{членов}} = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, сумма членов, стоящих в каждой скобке, больше $\frac{1}{2}$. Так как общее число скобок, не считая двух первых членов, очевидно, равно $m-1$, то

$$S_{2^m} > 1+\frac{m}{2}.$$

Если число членов $n=2^m$ в сумме S_{2^m} возрастает неограниченно, то и показатель m также возрастает неограниченно. Поэтому S_{2^m} стремится к бесконечности и, следовательно, гармонический ряд (1) расходится.

Таким образом, рассмотренный нами необходимый признак сходимости, вообще говоря, не дает возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Мы перейдем теперь к установлению таких признаков, которые позволят в ряде случаев точно ответить на вопрос о сходимости или расходимости данного ряда.

§ 4. Признак сравнения рядов

Для доказательства дальнейших теорем нам понадобится такая лемма:

Лемма. *Если в ряде*

$$u_1+u_2+\ldots+u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots \tag{1}$$

отбросить конечное число первых начальных членов, например p членов, то получим ряд

$$u_{p+1}+u_{p+2}+u_{p+3}+\ldots, \tag{2}$$

который сходится (*или расходится*) *одновременно с данным рядом* (1).

Доказательство. Обозначим сумму отброшенных членов через Q:

$$Q=u_1+u_2+\ldots+u_p.$$

Пусть S_n — сумма первых n членов ряда (1) и S'_n — сумма первых n членов ряда (2). Тогда, очевидно, $S_{n+p}=Q+S'_n$. Отсюда $S'_n=S_{n+p}-Q$.

Предположим, что ряд (1) сходится, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, а следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+p}=S.$$

В таком случае

$$\lim_{n\to\infty} S'_n=S-Q,$$

и следовательно, ряд (2) тоже сходится.

Предположим теперь, что ряд (2) сходится, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S'$; тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+p} = S' + Q.$$

Поэтому ряд (1) также сходится.

Тем самым доказано, что из сходимости одного из наших рядов следует сходимость и другого, и обратно.

Лемма доказана полностью.

Следствие 1. *При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число членов его.*

Следствие 2. *Если ряд* (1) *сходится и S есть его сумма, то n-й остаток этого ряда $R_n = S - S_n$ представляет собой сумму ряда $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$*, т. е.

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

Теперь докажем такую теорему.

Признак сравнения рядов. *Если члены ряда*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (3)$$

положительны (точнее, неотрицательны) и не превышают соответствующих членов сходящегося ряда

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (4)$$

то данный ряд (3) *тоже сходится.*

Доказательство. Введем обозначения

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

и

$$S'_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Так как ряд (4) сходится, то имеем

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S',$$

где S' — сумма ряда (4). Согласно условию теоремы выполнены неравенства $0 \leqslant u_1 \leqslant v_1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant v_2$, ..., $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, ... Отсюда следует, что

$$S_n \leqslant S'_n \leqslant S'.$$

Ввиду того, что члены ряда (3) положительны, то при увеличении n сумма S_n монотонно возрастает, оставаясь, однако, все время не больше S'. Как известно (гл. VII, § 10), *всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.* Поэтому S_n при неогра-

ниченном возрастании n стремится к определенному пределу и, следовательно, ряд (3) сходится.

Следствие. *Если члены некоторого ряда не меньше соответствующих членов знакоположительного ряда*[1]) *и второй ряд расходится, то расходится также и первый ряд.*

В самом деле, если бы первый ряд сходился, то в силу теоремы сходился бы и второй ряд, что противоречит нашему условию.

Замечание. В силу леммы признак сравнения рядов (3) и (4) и следствие к нему остаются в силе, если соответствующие неравенства между их членами выполнены, начиная с некоторого номера ($n \geqslant N$).

Применим этот признак к доказательству сходимости некоторых рядов, сравнивая их с рядами, сходимость которых уже известна.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

Отбросив первый член, сравним его со сходящимся рядом (3) из § 1:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Очевидно,

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\quad \ldots,\quad \frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},\quad \ldots$$

Отсюда на основании леммы и признака сравнения ряд (5) сходится.

Далее, из сравнения с рядом (5) следует, что ряд

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$$

сходится, если $p>2$. Можно доказать, что этот последний ряд **сходится** при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \tag{6}$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$, то из сравнения с гармоническим рядом (§ 3) следует, что ряд (6) расходится.

---

[1]) То есть ряда с положительными (точнее, неотрицательными) членами.

§ 5. Признак сходимости Даламбера

Существует много признаков сходимости рядов, позволяющих судить о сходимости или расходимости данного ряда по поведению его коэффициентов. Рассмотрим один из них.

Признак сходимости Даламбера. *Пусть все члены ряда*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

положительны, и пусть при неограниченном возрастании номера n предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му существует и равен некоторому числу l, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. В таком случае:

1°. *Если этот предел l меньше единицы, то данный ряд сходится.*

2°. *Если предел l больше единицы, то ряд расходится.*

3°. *Если предел l равен единице, то признак определенного ответа о сходимости или расходимости ряда не дает, т. е. в этом случае возможна как сходимость ряда, так и расходимость его.*

Доказательство. Пусть имеем ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots, \tag{1}$$

составленный из положительных чисел, и пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда при достаточно большом n, т. е. при n, не меньшем некоторого числа N, имеем

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon,$$

где ε — заранее заданное как угодно малое положительное число. Отсюда $-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < \varepsilon$, или

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon, \tag{2}$$

если только $n \geqslant N$.

Рассмотрим отдельно три случая.

1°. Пусть $l < 1$. Мы можем взять число ε настолько малым, что $l + \varepsilon$ также будет меньше 1; тогда, положив $l + \varepsilon = q$, получим

$$0 < q < 1.$$

На основании неравенства (2) имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или

$$u_{n+1} < u_n q,$$

причем это последнее неравенство будет выполнено, если $n = N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots$ Давая номеру n эти значения, получим серию неравенств:

$$u_{N+1} < u_N q,$$
$$u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2,$$
$$u_{N+3} < u_{N+2} q < u_N q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Итак, члены ряда

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \tag{3}$$

меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \ldots \tag{4}$$

Так как знаменатель q прогрессии (4) меньше единицы, то ряд (4) сходится (§ 2, пример 1). Но тогда на основании признака сравнения и замечания к нему сходятся как ряд (3), так и исходный ряд (1).

2°. Пусть теперь $l > 1$. Мы можем $\varepsilon > 0$ взять настолько малым, что число $l - \varepsilon$ будет также больше единицы. Тогда при достаточно большом n на основании (2) будем иметь $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или

$$u_{n+1} > u_n \text{ при } n = N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots$$

Отсюда

$$u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \ldots$$

Таким образом, члены ряда (1), начиная с некоторого номера N, возрастают при увеличении их номера, будучи положительными. Следовательно, u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому на основании следствия из необходимого признака сходимости (§ 3) ряд (1) расходится, причем общий член его не стремится к нулю.

3°. Если $l = 1$, то на примерах можно показать, что ряд в одних случаях сходится, в других — расходится. В этом случае мы должны прибегнуть или к теореме сравнения или к другим признакам.

Замечание 1. Если ряд (1) функциональный, т. е.

$$u_n = f_n(x) > 0$$

и $l=l(x)$ — соответствующий предел, то наша схема 1°, 2° и 3° остается в силе для каждого x.

Замечание 2. Из доказательства признака сходимости Даламбера для случая 2° следует, что *если для некоторого ряда*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

выполнено неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1,$$

то n-й член u_n этого ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\ldots+\frac{a^n}{n}+\frac{a^{n+1}}{n+1}+\ldots, \tag{5}$$

где a — положительное число.

Имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}}{n+1}:\frac{a^n}{n}=a\cdot\frac{n}{n+1}$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{n_n}=a\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=a.$$

На основании признака Даламбера ряд (5) сходится при $0<a<1$ и расходится при $a>1$.

Если $a=1$, то признак Даламбера ответа не дает. Но в этом случае ряд (5) принимает вид

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Это гармонический ряд; он, как мы видели выше (§ 3), расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots$$

с общим членом $u_n=\frac{1000^n}{n!}$.

Имеем $u_{n+1}=\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$. Отсюда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1000^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 1000^n}=\frac{1000}{n+1}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0.$$

Поэтому ряд сходится. Заметим, что члены данного ряда вначале возрастают (до 1000-го члена!), а затем начинают быстро убывать. Такой ряд мало пригоден для практических вычислений.

Пример 3. Для ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

согласно признаку Даламбера соответствующий предел $l=1$. Как известно (§ 4, пример 1), этот ряд сходится.

§ 6. Абсолютная сходимость

Приведенные выше достаточные признаки сходимости рядов относились к рядам с положительными членами. Аналогичными свойствами обладают также ряды с отрицательными членами.

Рассмотрим теперь ряды, часть членов которых положительна, а часть членов отрицательна или равна нулю. Такие ряды называются *знакопеременными*.

Теорема. *Если для знакопеременного ряда*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{A}$$

сходится ряд, составленный из модулей его членов:

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{B}$$

то данный ряд также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+\ldots+(u_n+|u_n|)+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|). \tag{C}$$

Так как

$$0 \leqslant u_n+|u_n| \leqslant 2|u_n|$$

$(n=1, 2, \ldots)$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2|u_n|) \tag{B'}$$

в силу сходимости ряда (B) сходится, то на основании признака сравнения (§ 4) ряд (C) также сходится. Но наш ряд (A) представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

и, следовательно, есть ряд сходящийся (см. § 2).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение неверно. Именно, *если данный ряд сходится, то ряд, составленный из модулей его членов, не обязательно сходится; этот ряд может и расходиться.*

Таким образом, все сходящиеся ряды можно разбить на два класса.

К первому классу относятся такие сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из модулей их членов, также сходятся. Такие ряды называются *абсолютно сходящимися.*

Ко второму классу относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из модулей их членов, расходятся. Такие сходящиеся ряды называются *рядами неабсолютно сходящимися* или *условно сходящимися.*

О п р е д е л е н и е. *Ряд называется а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из модулей его членов.*

Ряд называется у с л о в н о с х о д я щ и м с я, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Например, сходящийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$$

есть ряд а б с о л ю т н о с х о д я щ и й с я, так как ряд, составленный из модулей его членов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots,$$

тоже сходится. (Оба ряда — геометрические прогрессии со знаменателями, соответственно равными $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.)

Напротив, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots,$$

как мы увидим дальше, есть р я д с х о д я щ и й с я (см. §7), н о о н н е а б с о л ю т н о с х о д и т с я, так как ряд, составленный из модулей его членов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

расходится (гармонический ряд).

Признак абсолютной сходимости ряда. *Пусть для некоторого ряда*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (A)$$

выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l.$

В таком случае: 1) *если* $l<1$, *то данный ряд* (A) *сходится абсолютно*; 2) *если* $l>1$, *то ряд* (A) *расходится*.

В самом деле, наше условие есть не что иное, как признак Даламбера, примененный к ряду

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (B)$$

Отсюда вытекает, что если $l<1$, то оба ряда (A) и (B) сходятся и, следовательно, данный ряд (A) сходится абсолютно.

Если же $l>1$, то, в силу замечания к признаку Даламбера, $|u_n|$ не стремится к нулю при $n\to\infty$. В этом случае оба ряда (A) и (B) расходятся.

§ 7. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$v_1-v_2+v_3-v_4+v_5-v_6+\ldots+(-1)^{n-1}v_n+\ldots^{1)}, \qquad (1)$$

где $v_n\geqslant 0$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, т. е. ряд, у которого любые рядом стоящие члены его имеют противоположные знаки.

Теорема Лейбница. *Если модули членов знакочередующегося ряда* (1) *монотонно убывает при возрастании их номера, т. е.*

$$v_1\geqslant v_2\geqslant v_3\geqslant v_4\geqslant\ldots \qquad (2)$$

и n-й член ряда при неограниченном возрастании n стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}v_n=0, \qquad (3)$$

то ряд этот сходится (вообще говоря, не абсолютно).

Доказательство. Возьмем сумму S_{2m} первых $2m$ членов ряда (1) и запишем ее следующим образом:

$$S_{2m}=(v_1-v_2)+(v_3-v_4)+\ldots+(v_{2m-1}-v_{2m}). \qquad (4)$$

Так как разности, стоящие в скобках в сумме (4) на основании условия (2) положительны или равны нулю, то

$$S_{2m}\geqslant 0.$$

---

[1]) Точнее ряд (1) должен быть записан так:

$$v_1+(-v_2)+v_3+(-v_4)+\ldots$$

Если $2m$ возрастает, то S_{2m} не убывает, ибо каждый раз прибавляются положительные или равные нулю слагаемые.

С другой стороны, эту сумму можно представить в таком виде:

$$S_{2m} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \ldots - (v_{2m-2} - v_{2m-1}) - v_{2m}. \quad (5)$$

Отсюда

$$S_{2m} \leqslant v_1.$$

Следовательно, S_{2m}, будучи монотонно возрастающей (точнее, не убывающей) и ограниченной последовательностью, стремится при $m \to \infty$ к некоторому пределу S (см. гл. VII, § 10), т. е.

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m} = S.$$

Но очевидно, что

$$S_{2m+1} = S_{2m} + v_{2m+1},$$

причем на основании (3) имеем $\lim\limits_{m \to \infty} v_{2m+1} = 0$. Принимая это во внимание, получим

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} S_{2m} + \lim_{m \to \infty} v_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, S_n при неограниченном возрастании n стремится к одному и тому же пределу S, будет ли n четное или нечетное. Поэтому ряд (1) сходится.

Замечание. *Абсолютная погрешность при замене суммы S сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, суммой S_n его первых n членов не превышает модуля первого отброшенного члена.*

В самом деле, отбрасывая в сходящемся знакочередующемся ряде все члены после члена $(-1)^{n-1} v_n$ и обозначая полученную в результате этого абсолютную погрешность через ρ_n, имеем

$$S - S_n = (-1)^n v_{n+1} + (-1)^{n+1} v_{n+2} + \ldots =$$
$$= (-1)^n [(v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ldots];$$

отсюда

$$\rho_n = |S - S_n| = (v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ldots,$$

или

$$\rho_n = v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - \ldots$$

Следовательно,

$$\rho_n \leqslant v_{n+1}.$$

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

приведенный в конце § 6, сходится, так как для этого ряда выполнены все условия теоремы Лейбница.

§ 8. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (1)$$

расположенный по возрастающим целым неотрицательным степеням переменной x и имеющий коэффициенты a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$, не зависящие от x, называется *степенным рядом.* Иногда рассматривают степенной ряд более общего вида:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots, \qquad (2)$$

где a — некоторое постоянное число. Ряд (2) легко приводится к виду (1), если положить $x-a=x'$. Поэтому в дальнейшем мы почти исключительно будем заниматься степенными рядами вида (1).

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (1). Давая переменной x фиксированное значение, получим числовой ряд, который в зависимости от x сходится или расходится.

Можно доказать, что для любого степенного ряда (1) существует конечное или бесконечное неотрицательное число R — *радиус сходимости ряда* — такое, что если $R>0$, то при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ расходится. При $|x|=R$, т. е. при $x=R$ и при $x=-R$, может иметь место как сходимость, так и расходимость степенного ряда. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Если $R=+\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. В случае, если $R=0$, то степенной ряд (1) сходится лишь в точке $x=0$ и интервал сходимости, строго говоря, не существует.

В простейших случаях радиус сходимости степенного ряда (1) может быть определен с помощью признака Даламбера. Для этого рассмотрим ряд, составленный из модулей членов ряда (1):

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots \qquad (3)$$

Как известно из предыдущего, если ряд (3) сходится, то будет сходиться и ряд (1) и при этом абсолютно. Для решения вопроса о сходимости ряда (3) воспользуемся признаком сходимости Даламбера. Обозначим $(n+1)$-й член ряда (3) через v_n, т. е. $v_n=|a_n||x|^n$; отсюда $v_{n+1}=$

$=|a_{n+1}||x|^{n+1}$. Составим отношение

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|.$$

Предположим, что существует предел отношения $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ при $n\to\infty$. Обозначим этот предел через l:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l. \tag{4}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=l|x|. \tag{5}$$

Очевидно, если $|x|<\frac{1}{l}$, то $l|x|<1$ и ряд (3) сходится. Следовательно, сходится и ряд (1) и притом абсолютно.

Если же $|x|>\frac{1}{l}$, то $l|x|>1$. На основании замечания 2 из § 5 оба ряда (3) и (1) расходятся.

Таким образом, $R=\frac{1}{l}\geqslant 0$ есть радиус сходимости степенного ряда (1), и на основании соотношения (4) имеем формулу

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{6}$$

Остается открытым вопрос, будет ли сходиться ряд (1) при $R>0$ на концах интервала сходимости $(-R, R)$, т. е. когда $x=R$ или $x=-R$? В каждом отдельном случае этот вопрос решается особо.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{7}$$

Здесь $a_n=\frac{1}{n}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Согласно (6) для радиуса сходимости R ряда (7) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, ряд (7) сходится в интервале $(-1, 1)$.

Чтобы решить вопрос о сходимости ряда (7) на концах интервала, положим сначала $x=1$. Получим гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который, как мы видели, расходится.

Возьмем теперь $x=-1$. Тогда ряд (7) примет вид

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

Этот ряд сходится условно в силу теоремы Лейбница.

Итак, область сходимости ряда (7) — промежуток $[-1, 1)$.

§ 9. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Сумма степенного ряда

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

представляет собой функцию, определенную в интервале сходимости $(-R, R)$ этого ряда, где предполагается, что $R>0$.

Можно доказать, что функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда (1), т. е.

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

при $-R<x<R$. Это же справедливо и по отношению к производным высших порядков.

Аналогично, неопределенный интеграл от функции $f(x)$ для всех значений x, принадлежащих интервалу сходимости, может быть получен почленным интегрированием ряда (1), т. е.

$$\int f(x)\,dx=C+a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\ldots,$$

если $-R<x<R$.

Таким образом, степенной ряд в своем интервале сходимости по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования ведет себя так же, как многочлен с конечным числом членов.

§ 10. Разложение данной функции в степенной ряд

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ *разлагать в степенной ряд*, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда, так как тем самым мы получаем возможность просто вычислять значения этой функции с любой степенью точности.

Прежде чем поставить вопрос в общем виде, разберем некоторые частные случаи.

Рассмотрим степенной ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем x и, как мы видели, сходится при $|x|<1$, причем сумма его равна $\frac{1}{1-x}$. Следовательно, мы можем написать

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (1)$$

На последнее равенство можно смотреть как на разложение функции $\frac{1}{1-x}$ в степенной ряд, расположенный по возрастающим степеням переменной x. Из разложения (1) легко получить другие разложения, представляющие большой интерес.

Разложение функции $\ln(1+x)$. Заменяя в разложении (1) x на $-z$, будем иметь

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots \qquad (2)$$

Если

$$0\leqslant|z|\leqslant|x|<1,$$

то равенство (2), как было сказано в § 9, можно проинтегрировать почленно по z в пределах от 0 до x. Поэтому, умножая равенство (2) на dz и интегрируя почленно в пределах от 0 до x, получим

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z}=\int_0^x dz-\int_0^x z\,dz+\int_0^x z^2\,dz-\ldots+(-1)^n\int_0^x z^n\,dz+\ldots$$

Отсюда

$$\ln(1+z)\Big|_0^x=\frac{z}{1}\Big|_0^x-\frac{z^2}{2}\Big|_0^x+\frac{z^3}{3}\Big|_0^x-\ldots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x+\ldots,$$

или

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,$$

если $|x|<1$. Можно показать, что это разложение справедливо также при $x=1$ и, следовательно,

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Разложение функции $\operatorname{arctg} x$. Положим в разложении (1) $x = -z^2$:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots$$

Умножая последнее равенство на dz и интегрируя почленно в пределах от 0 до x, где $|x| < 1$, получим

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^x dz - \int_0^x z^2\,dz + \int_0^x z^4\,dz - \ldots + (-1)^n \int_0^x z^{2n}\,dz + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} z \Big|_0^x = z \Big|_0^x - \frac{z^3}{3}\Big|_0^x + \frac{z^5}{5}\Big|_0^x - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x + \ldots$$

Так как $\operatorname{arctg} 0 = 0$, то окончательно имеем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

если $|x| < 1$. Можно доказать, что это разложение остается верным и при $x = 1$, и при $x = -1$.

В частности, при $x = 1$ выводим

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Мы видим, что многие функции, как, например, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ и т. п., допускают разложение в степенной ряд относительно аргумента x. Естественно поставить общий вопрос о разложении данной функции $f(x)$ в ряд по возрастающим целым неотрицательным степеням переменной x. Этим вопросом мы и займемся в следующем параграфе.

§ 11. Ряд Маклорена

Предположим, что данная функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — неопределенные коэффициенты, причем интервал сходимости $|x| < R$ этого ряда не сводится к точке, т. е. $R > 0$.

Как было указано выше, степенной ряд (1) в его интервале сходимости можно дифференцировать почленно

любое число раз, понимая под этим, что все получающиеся ряды будут сходиться и их суммы равны соответствующим производным.

Последовательно дифференцируя почленно ряд (1) бесконечное число раз, будем иметь

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots,$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + 3\cdot 4\cdot 5a_5x^2 + \ldots,$$
$$f^{IV}(x) = 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5x + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая в этих равенствах, а также в (1) $x = 0$, получим

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2,$$
$$f'''(0) = 2\cdot 3a_3, \quad f^{IV}(0) = 2\cdot 3\cdot 4a_4, \ \ldots$$

Отсюда

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1\cdot 2},$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad a_4 = \frac{f^{IV}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ \ldots$$

Подставляя далее значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ в ряд (1), получим *ряд Маклорена* [1])

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2)$$

(ср. гл. XI, § 6, формула (6)).

§ 12. Применение ряда Маклорена к разложению в степенные ряды некоторых функций

1) Разложение функции e^x. Пусть

$$f(x) = e^x.$$

Имеем

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \quad f^{IV}(x) = e^x, \ \ldots$$

Полагая здесь $x = 0$, получим

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1,$$
$$f'''(0) = 1, \quad f^{IV}(0) = 1, \ \ldots$$

---

[1]) В общем случае, формально составленный ряд Маклорена для функции $f(x)$ не обязательно сходится к этой функции.

Подставляя эти значения в ряд Маклорена (§ 11, формула (2)), окончательно будем иметь

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

Общий член ряда из правой части формулы (1) есть $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Применяя признак Даламбера к ряду из модулей его членов, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0;$$

следовательно, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится для любого x, т. е. интервал сходимости его есть $(-\infty, +\infty)$. В подробных курсах доказывается, что сумма этого ряда для любого значения x равна e^x, т. е. разложение (1) справедливо для любого x.

2) Разложение функции $\sin x$. Пусть

$$f(x) = \sin x;$$

отсюда

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f^{IV}(x) = \sin x, \ \ldots$$

Полагая $x = 0$, имеем

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0,$$
$$f'''(0) = -1, \quad f^{IV}(0) = 0, \ \ldots$$

Подставляя эти значения в формулу (2) из § 11, получим

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad (2)$$

где x измеряется в радианах. Нетрудно убедиться, что ряд из правой части формулы (2) сходится при любом x. Можно доказать, что сумма его равна $\sin x$, т. е. что разложение (2) справедливо при любом x.

3) Разложение функции $\cos x$. Если

$$f(x) = \cos x,$$

то имеем

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x,$$
$$f'''(x) = \sin x, \quad f^{IV}(x) = \cos x, \ \ldots$$

Полагая $x=0$, получим

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=-1,$$
$$f'''(0)=0, \quad f^{\mathrm{IV}}(0)=1, \ldots$$

Подставляя эти значения в формулу Маклорена (2) из § 11, находим

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \qquad (3)$$

где x измеряется в радианах. Этот ряд сходится так же, как (2), при любом x, как нетрудно убедиться. Доказывается, что сумма этого ряда равна $\cos x$.

Разложение (3) можно было получить из разложения (2) почленным дифференцированием.

4) Разложение бинома Ньютона $(1+x)^m$. Пусть

$$f(x)=(1+x)^m,$$

где m — число целое или дробное, положительное или отрицательное. Тогда имеем

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Полагая $x=0$ во всех этих формулах, получим

$$f(0)=1, \quad f'(0)=m, \quad f''(0)=m(m-1),$$
$$f'''(0)=m(m-1)(m-2), \ldots,$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1), \ldots$$

Подставляя выражения для $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... в ряд Маклорена (2) из § 11, будем иметь

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n+\ldots \qquad (4)$$

Формально формула бинома Ньютона для нецелого или отрицательного показателя выглядит так же, как и для целого положительного показателя. Если m — целое положительное число, то при $n=m+1$ множитель $m-n+1$

равен нулю. Следовательно, ряд (4) оборвется и вместо бесконечного разложения получится конечная сумма (ср. гл. XI, § 5).

Пользуясь формулой $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, найдем интервал сходимости $(-R,\ R)$ ряда из правой части формулы (4). Мы имеем

$$a_n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n};$$

$$a_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1\cdot2\cdot3\ldots n(n+1)}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|$$

и, следовательно,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right|=\left|\frac{1}{-1}\right|=1.$$

Таким образом, биномиальный ряд сходится внутри интервала

$$-1<x<+1$$

и расходится вне его. Сходится ли этот ряд при $x=1$ и $x=-1$, необходимо исследовать для каждого случая отдельно.

Значительно сложнее доказывается, что при $|x|<1$ сумма ряда равна $(1+x)^m$, т. е. разложение (4) справедливо всюду на $(-1,\ 1)$.

§ 13. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

Полученные разложения дают возможность вычислять частные значения функции, приближенно вычислять некоторые «неберущиеся» определенные интегралы и т. п. Рассмотрим несколько примеров.

1) Вычисление $\sin 1$. Полагая $x=1$ в разложении для $\sin x$, имеем

$$\sin 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots$$

Если отбросить все члены, начиная с 4-го, то погрешность будет по абсолютной величине меньше $\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}$ (так

как ряд для $\sin 1$ есть ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница). Отсюда

$$\sin 1 \approx \sin 57°18' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0{,}8417$$

с точностью до 0,0002.

2) Вычисление корней. Пусть требуется вычислить $\sqrt[3]{9}$.

Записав это выражение в виде

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/3}$$

и полагая в формуле бинома Ньютона $m = 1/3$ и $x = 1/8$, будем иметь

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41\,472} - \ldots\right) \approx$$

$$\approx 2(1 + 0{,}0417 - 0{,}0017 + 0{,}0001) = 2{,}0802.$$

По таблицам же $\sqrt[3]{9} = 2{,}0801$.

3) Вычисление натуральных логарифмов. В § 10 было выведено следующее разложение:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad (1)$$

Ряд (1) не годится для вычислений натуральных логарифмов чисел, бо́льших 2, так как он расходится при $x > 1$. Однако на основе его мы можем получить другой ряд, пригодный для нашей цели. Для этого заменим в формуле (1) x на $-x$; тогда получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad (2)$$

Оба ряда (1) и (2) имеет общий интервал сходимости: $|x| < 1$. Как известно (см. § 1), сходящиеся ряды можно складывать или вычитать почленно. Поэтому, предполагая, что $|x| < 1$, и вычитая из равенства (1) равенство (2), будем иметь

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right). \qquad (3)$$

Полагая $\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}$ $(N>0)$, находим $x=\frac{1}{2N+1}$. Подставляя эти значения в ряд (3), получим

$$\ln(N+1)-\ln N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2N+1)^7}+\ldots\right]. \quad (4)$$

Применяя признак Даламбера, легко убедиться, что ряд (4) сходится для всякого положительного числа N. Следовательно, пользуясь этим рядом, можно шаг за шагом определить натуральные логарифмы всех целых положительных чисел.

Ряд (4) сходится при больших N очень быстро. Оценим при $N>0$ абсолютную погрешность ρ_n, которая получается, если отбросить в формуле (4) все члены, стоящие в скобке после n-го члена. Имеем

$$\rho_n=2\left[\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}}+\ldots\right].$$

Очевидно, что

$$\rho_n<\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right]$$

или, подсчитывая сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящей в квадратных скобках, получим окончательно

$$\rho_n<\frac{1}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\cdot\frac{1}{N(N+1)}.$$

Положим в разложении (4), например, $N=1$ и $n=3$. Имеем

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}\right)=0{,}6932;$$

при этом на основании формулы (5) абсолютная погрешность удовлетворяет неравенству

$$\rho_3<\frac{1}{2\cdot 7\cdot 3^5\cdot 1\cdot 2}<\frac{1}{5000},$$

т. е. мы имеем три верных десятичных знака.

Далее, полагая $N=2$ и ограничившись двумя членами $(n=2)$, получим

$$\ln 3\approx\ln 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}\right)=1{,}0985,$$

причем абсолютная погрешность удовлетворяет неравенству

$$\rho_2<\frac{1}{2\cdot 5\cdot 5^3\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{7500}.$$

Продолжая дальше, таким образом можем вычислить натуральный логарифм любого положительного числа с достаточной точностью.

4) Применение рядов для вычисления определенных интегралов. Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,^{1)}.$$

Соответствующий неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

не может быть выражен в элементарных функциях, т. е. представляет собой «неберущийся интеграл», и следовательно, применить формулу Ньютона—Лейбница здесь нельзя. Тем не менее исходный определенный интеграл можно вычислить приближенно с помощью рядов.

Разделив почленно ряд для $\sin x$ на x, будем иметь

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Отсюда, интегрируя почленно, получим

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4\,dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \ldots = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \ldots$$

$$\ldots \approx 0{,}94611.$$

Так как ряд знакопеременный и модули его членов монотонно убывают, то, ограничившись тремя членами, получаем, что погрешность меньше $\frac{1}{7!\cdot 7} = \frac{1}{35\,280} < 0{,}00003$.

§ 14. Ряд Тейлора

В некоторых случаях функция $f(x)$ или ее производные теряют смысл при $x = 0$, как, например, функция $f(x) = \ln x$ или $f(x) = \sqrt{x}$. Такие функции не могут быть

---

[1]) Здесь подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ определена при $x \neq 0$. При $x = 0$ по непрерывности полагаем $f(0) = 1$.

разложены в ряд Маклорена. Для разложения подобного рода функций иногда можно воспользоваться более общими степенными рядами, расположенными по возрастающим степеням разности $x-a$, где a — надлежащим образом подобранное постоянное число.

Пусть данная функция $f(x)$ допускает разложение по возрастающим степеням разности $x-a$:

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+ \\ +A_3(x-a)^3+A_4(x-a)^4+\ldots, \qquad (1)$$

которое справедливо в некотором интервале $|x-a|<R$.

Положим $x-a=z$. Тогда разложение (1) перепишется в виде

$$F(z)\equiv f(z+a)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots, \qquad (2)$$

где $|z|<R$. Следовательно, согласно § 11 разложение (2) есть ряд Маклорена для функции $F(z)$. Так как $F^{(n)}(z)=f^{(n)}(z+a)$ $(n=1, 2, \ldots)$, то отсюда получаем

$$A_0=F(0)=f(a), \quad A_1=\frac{F'(0)}{1!}=\frac{f'(a)}{1!},$$

$$A_2=\frac{F''(0)}{2!}=\frac{f''(a)}{2!}, \ \ldots, \ A_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ \ldots$$

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд (1), будем иметь

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+ \\ +\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (3)$$

Это и есть *ряд Тейлора*.

В частности, полагая здесь $a=0$, получим ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots \\ \ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Ограничиваясь в формуле (3) лишь конечным числом членов, вместо ряда Тейлора получим *многочлен Тейлора*

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (4)$$

(ср. гл. XI, § 6, формула (1)). Если ряд (3) сходится в некоторой окрестности U_a точки a и его сумма равна

функции $f(x)$, то многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$ в окрестности U_a.

Пример 1. Разложить многочлен $f(x)=x^3-5x^2+8x+3$ по возрастающим степеням разности $x-2$.

Дифференцируя функцию $f(x)$, имеем

$$f'(x)=3x^2-10x+8, \quad f''(x)=6x-10,$$
$$f'''(x)=6, \quad f^{(n)}(x)=0 \quad \text{при} \quad n>3.$$

Подставляя $x=2$, получим

$$f(2)=7,\ f'(2)=0,\ f''(2)=2,\ f'''(2)=6,\ f^{(n)}(2)=0 \text{ при } n>3.$$

На основании ряда Тейлора (3) разложение функции $f(x)$ по возрастающим степеням разности $x-2$ имеет вид

$$f(x)=7+\frac{x-2}{1}\cdot 0+\frac{(x-2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{(x-2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6$$

или окончательно $f(x)=7+(x-2)^2+(x-2)^3$.

Пример 2. Функцию $f(x)=\ln x$ разложить по возрастающим степеням разности $x-1$.

Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3}, \quad f^{IV}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}, \ \ldots$$

Отсюда

$$f'(1)=1, \quad f''(1)=-1, \quad f'''(1)=1\cdot 2, \quad f^{IV}(1)=-1\cdot 2\cdot 3, \ \ldots$$

Следовательно,

$$\ln x=\ln 1+1\cdot(x-1)-\frac{1}{1\cdot 2}\cdot(x-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(x-1)^3-$$
$$-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(x-1)^4+\ldots,$$

или

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$$

Это разложение справедливо, если $0<x\leqslant 2$.

Заметим, что этот ряд можно было бы получить непосредственно из ряда для $\ln(1+x)$ (см. § 10), положив $\ln x=\ln(1+z)$, где $z=x-1$.

§ 15. Ряды в комплексной области

В ряде случаев приходится рассматривать ряды, членами которых являются комплексные числа, т. е. ряды вида

$$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\ldots+(u_n+iv_n)+\ldots, \qquad (1)$$

где u_n и v_n ($n=1, 2, \ldots$) — действительные числа и $i^2=-1$.

Ряд (1) называется *сходящимся*, если сходятся по отдельности ряд, составленный из действительных частей членов данного ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{2}$$

и ряд, составленный из мнимых частей этих членов:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{3}$$

Если через S_n обозначить сумму первых n членов ряда (2) и через T_n — сумму первых n членов ряда (3), то в случае сходимости этих рядов существуют

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} T_n = T.$$

В таком случае комплексное число $S + iT$ называется *суммой ряда* (1).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если сходится ряд модулей членов ряда* (1), *то ряд* (1) *также сходится.*

Доказательство. В самом деле, если сходится ряд

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2} + \ldots + \sqrt{u_n^2 + v_n^2} + \ldots,$$

то в силу очевидных неравенств

$$|u_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \quad \text{и} \quad |v_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$$

($n = 1, 2, \ldots$) на основании признака сравнения (§ 4) и теоремы из § 6 будут сходиться и при этом абсолютно оба ряда: (2) и (3). Тогда согласно определению сходится также ряд (1). Теорема доказана.

В комплексной области рассматривают также и степенные ряды

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $z = x + iy$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

В силу предыдущей теоремы такой ряд заведомо будет сходиться, если сходится ряд модулей

$$|c_0| + |c_1||z| + |c_2|\,|z|^2 + \ldots + |c_n|\,|z|^n + \ldots,$$

где $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Для исследования сходимости последнего ряда можно применять все известные нам признаки, например, признак Даламбера.

§ 16. Формулы Эйлера

Применим полученные нами разложения e^x, $\sin x$, $\cos x$ для вывода весьма важных формул, связывающих эти функции между собой.

Если x — действительное число, то, как известно (см. § 12), имеет место разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

при этом ряд сходится для любого значения x.

Если $z = x + iy$, где x и y — действительные числа и $i^2 = -1$, то по определению положим

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (1)$$

Применяя признак Даламбера к ряду модулей

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \ldots,$$

обнаружим, что этот ряд сходится при каждом значении $|z|$, а следовательно, сходится и ряд (1). Тем самым показательная функция e^z определена для всех комплексных значений z.

В частности, при $z = ix$, где x — действительное число, имеем

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \\ + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \ldots$$

Так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т. д., то, подставляя эти значения в разложение для e^{ix}, получим

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

или, отделив здесь действительные и мнимые части, будем иметь

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right) + \\ + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Согласно формулам (2) и (3) из § 12 выражение, стоящее в первой скобке, равно $\cos x$, а выражение, стоящее во

второй скобке, равно $\sin x$. Поэтому мы приходим к такой замечательной формуле:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \qquad (2)$$

Заменяя здесь x на $-x$ и учитывая, что $\cos(-x)=\cos x$ и $\sin(-x)=-\sin x$, находим

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \qquad (3)$$

Мы получили знаменитые *формулы Эйлера.*

Разрешая формулы (2) и (3) относительно $\cos x$ и $\sin x$, будем иметь

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

В общем случае, если $z=x+iy$, можно показать, что

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}. \qquad (4)$$

Следовательно,

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Пример. $e^{1+\frac{\pi}{2}i}=e\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=ei.$

Если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — комплексное число в тригонометрическом виде (гл. XVI, § 2), то на основании формулы (4) получаем *показательную форму комплексного числа*

$$z=re^{i\varphi}, \qquad (5)$$

где $r=|z|$ и $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

§ 17. Тригонометрические ряды Фурье

Напомним (гл. VIII, § 6), что функция $f(x)$ называется *кусочно непрерывной* на данном промежутке $\langle a, b\rangle$, если этот промежуток можно разбить на конечное число частичных промежутков $\langle a_s, b_s\rangle$ ($s=1, 2, \ldots, N$), на каждом из которых: 1) функция $f(x)$ ограничена и непрерывна во внутренних точках; 2) на концах существуют конечные односторонние пределы

$$f(a_s+0)=\lim_{x_s\to a_s+0} f(x), \quad f(b_s-0)=\lim_{x_s\to b_s-0} f(x)$$
$$(s=1, 2, \ldots, N).$$

Под интегралом от функции $f(x)$ понимается число

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{s=1}^{N}\int_{a_s}^{b_s} f(x)\,dx.$$

Можно доказать, что для кусочно непрерывной на $\langle a, b\rangle$ функции $f(x)$ существует обобщенная первообразная (см. гл. XIV, § 12)

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad (x\in[a, b], \quad x_0\in[a, b])$$

и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две действительные кусочно непрерывные на данном конечном промежутке $\langle a, b\rangle$ функции. По аналогии с соответствующей операцией векторной алгебры (гл. XVIII, § 13) под *скалярным произведением* функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ понимается интеграл

$$(\varphi, \psi)\equiv\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

Замечание. Нетрудно сообразить, что произведение двух кусочно непрерывных на $\langle a, b\rangle$ функций есть функция кусочно непрерывная на $\langle a, b\rangle$ и, следовательно, в нашем случае, интеграл (1) существует.

Число

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)}=\left[\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right]^{1/2} \tag{2}$$

называется *нормой* функции $\varphi(x)$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* на данном промежутке $\langle a, b\rangle$, если

$$(\varphi, \psi)\equiv\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=0. \tag{3}$$

Рассмотрим *основную систему тригонометрических функций*

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{l}, \ \sin\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

общего периода $T=2l$ (l — полупериод). Физики называют функции

$$u_n=a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$v_n = b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

основными гармониками; графиками их являются синусоиды с амплитудами соответственно a_n и b_n (гармоника v_0 не рассматривается, так как $v_0 \equiv 0$).

Лемма. *Основные тригонометрические функции* (4) *попарно ортогональны на любом промежутке, длина которого равна общему периоду* $T = 2l$ *этих функций*, т. е. для стандартного промежутка $\langle -l,\ l\rangle$ имеем условия ортогональности:

$$\text{I.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

при $m \neq n$.

$$\text{II.}\quad \left(\sin\frac{m\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

при $m \neq n$.

$$\text{III.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

(m и n — любые целые числа).

Условия ортогональности I, II, III проверяются непосредственно путем вычисления соответствующих интегралов. Здесь используются формулы тригонометрии:

1) $$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

2) $$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

3) $$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Например, при $m \neq n$ имеем

$$\text{I.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} + \frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi l}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l} = 0,$$

так как $\sin k\pi = 0$ при любом целом k.

В справедливости соотношений II и III читателю предлагается убедиться самостоятельно.

Замечание. Подсчитаем нормы основных тригонометрических функций.

1) При $n=0$ имеем 0-ю гармонику $\cos 0x = 1$. Согласно формуле (2) получаем

$$\|1\|^2 = \int_{-l}^{l} 1^2\, dx = 2l,$$

т. е.

$$\|1\| = \sqrt{2l}. \tag{5}$$

2) При $n > 1$ имеем

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = l,$$

т. е.

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{6}$$

3) Аналогично,

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = l,$$

т. е.

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{7}$$

Пусть $f(x)$ — кусочно непрерывная периодическая функция периода $T=2l$. Естественно попытаться представить эту функцию в виде суммы конечного или бесконечного числа гармоник

$$u_n = a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ (см. гл. VI, § 3) того же периода $2l$ (гармонический анализ функции). Таким образом, мы

приходим к *тригонометрическому ряду Фурье*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{8}$$

(здесь, для удобства дальнейших выкладок, коэффициент 0-й гармоники берется с множителем 1/2). Исторически эта задача впервые возникла при математической обработке результатов наблюдений высоты приливной волны в данном месте, которая периодически повторяется с течением времени. Гармонический анализ высоты приливной волны позволил дать долгосрочные предсказания ее величины, что весьма важно для мореплавания.

Предположим, что ряд (8) сходится на промежутке $\langle -l, l\rangle$ и допускает почленное интегрирование.

Интегрируя почленно ряд (8), будем иметь

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]. \tag{9}$$

Так как

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=0$$

при $n=1, 2, \ldots$ (это также следует из условий ортогональности), то получаем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2l=a_0 l,$$

отсюда

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Заметим, что свободный член ряда (8)

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

представляет собой среднее значение периодической функции $f(x)$.

Умножая теперь обе части равенства (8) на $\cos\frac{m\pi x}{l}$ ($m = 1, 2, \ldots$) и интегрируя почленно, будем иметь

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx =$$
$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx + \right.$$
$$\left. + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]. \quad (11)$$

Отсюда в силу условий ортогональности I, III и формулы (6) получаем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = a_m\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{m\pi x}{l}\,dx = a_m l \quad (12)$$

и, следовательно,

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \quad (13)$$

Аналогично, умножая обе части равенства (8) на $\sin\frac{m\pi x}{l}$ ($m = 1, 2, \ldots$) и интегрируя почленно, находим

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx =$$
$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx + \right.$$
$$\left. + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]. \quad (14)$$

Отсюда в силу условий ортогональности II и III и формулы (7) имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = b_m\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx = b_m l$$

и, значит,

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \quad (15)$$

Заменяя букву m на букву n (что по смыслу формул допустимо!), мы из формул (13) и (15) для коэффициентов разложения (8) получим следующие значения:

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \left\{\begin{matrix} \cos\frac{n\pi x}{l} \\ \sin\frac{n\pi x}{l} \end{matrix}\right. dx \tag{16}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$). Заметим, что коэффициент a_0 на основании (10) получается из формулы (16) при $n = 0$; этим объясняется, что свободный член ряда (8) берется в форме $\frac{1}{2}a_0$. Числа a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Определение. *Тригонометрический ряд* (8), *коэффициентами которого являются коэффициенты Фурье* (16) *данной периодической функции* $f(x)$, *называется ее* ***рядом Фурье*** (*точнее,* ***тригонометрическим рядом Фурье***), *независимо от того, будет ли сумма этого ряда равна функции* $f(x)$ *или нет.*

В этом смысле говорят, что функция $f(x)$ порождает ряд Фурье, и пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{17}$$

где знак $\sim$ обозначает «соответствует».

Мы без доказательства укажем сейчас достаточные условия разложимости периодической функции в ряд Фурье.

Назовем функцию $f(x)$ *кусочно гладкой* на промежутке $\langle a, b\rangle$, если она кусочно непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и имеет на нем кусочно непрерывную производную $f'(x)$.

Теорема сходимости. *Пусть периодическая функция* $f(x)$, *определенная на* $(-\infty, +\infty)$, *кроме, быть может, точек разрыва ее, и имеющая период* $T = 2l > 0$, *является кусочно гладкой в своей основной области*[1]).

Тогда: 1) *ее ряд Фурье* (17) *сходится для любого значения* $x \in (-\infty, +\infty)$, *т. е. существует сумма ряда Фурье*

$$S(x) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]; \tag{18}$$

2) *сумма ряда Фурье* $S(x)$ *равна функции* $f(x)$ *в точках* x *непрерывности ее*: $S(x) = f(x)$ *и равна среднему ариф-*

[1]) То есть на любом промежутке, длина которого равна периоду этой функции.

метическому пределов функции $f(x)$ слева и справа в точках x_0 разрыва функции[1]), т. е.

$$S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]. \tag{19}$$

Так как для точки непрерывности x функции $f(x)$ имеем

$$f(x) = f(x-0) = f(x+0),$$

то в общем случае можно написать

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]. \tag{20}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что для функции $f(x)$ выполнены условия теоремы сходимости, и вместо знака соответствия $\sim$ будем писать знак равенства $=$ (игнорируя точки разрыва функции!). Таким образом, для ряда Фурье функции $f(x)$ имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{21}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются формулой (16).

Замечание. Формулы (21) и (16) упрощаются, если период функции $f(x)$ равен 2π. В этом случае $l = \pi$, и мы имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{21'}$$

где

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}\right. dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16'}$$

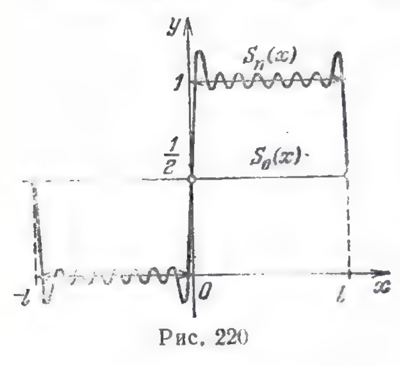


Рис. 220

Пример. Написать ряд Фурье периодической функции $f(x)$ периода $T = 2l$, если (рис. 220)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ 1, & 0 < x < l. \end{cases}$$

Из формулы (16) получаем

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{l} 1\cdot dx\right\} = 1,$$

[1]) Таких точек в основной области периодической функции $f(x)$ имеется лишь конечное число.

т. е. $a_0/2=1/2$;

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{0}^{l} 1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0} 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{0}^{l} 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=-\frac{1}{n\pi}[(-1)^n-1],$$

т. е.

$$b^n=\begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное;}\\ 2/n\pi, & \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases} \tag{22}$$

Отсюда, так как функция $f(x)$ кусочно гладкая в промежутке $\langle -l,\ l\rangle$, то справедливо разложение

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}+\ldots\right)$$
$$(-l<x<l). \tag{23}$$

На рис. 220 представлены графики частичных сумм ряда Фурье (23) функции $f(x)$: $S_0(x)=\frac{1}{2}$, $S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}$ и т. д.

§ 18. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Рассмотрим симметричный интеграл

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{l} f(x)\,dx, \tag{1}$$

где $f(x)$—функция, непрерывная или кусочно непрерывная на отрезке $[-l,\ l]$.

Делая в первом интеграле подстановку $x=-t$, $dx=-dt$ и учитывая независимость определенного интеграла от обозначения переменной интегрирования, получим

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=-\int_{l}^{0} f(-t)\,dt+\int_{0}^{l} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{l} f(-x)\,dx+\int_{0}^{l} f(x)\,dx=\int_{0}^{l}[f(-x)+f(x)]\,dx. \tag{2}$$

1) Пусть функция $f(x)$ четная, т. е. $f(-x)=f(x)$. Тогда из формулы (2) имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Таким образом, *симметричный интеграл от четной функции равен удвоенному интегралу от этой функции, взятому по половинному промежутку интегрирования.*

2) Пусть функция $f(x)$ нечетная, т. е. $f(-x)=-f(x)$. В таком случае из формулы (2) получаем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, *симметричный интеграл от нечетной функции равен нулю.*

Заметим, что утверждения 1) и 2) очевидны из геометрических соображений (рис. 221, *а* и *б*).

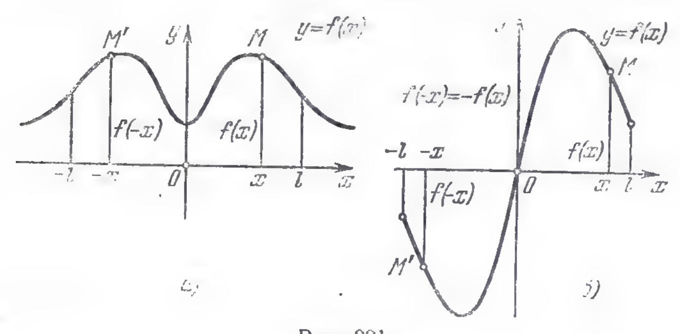


Рис. 221

Теорема. 1) *Ряд Фурье четной периодической функции содержит только косинусы кратных дуг*, т. е. в его состав входят лишь четные гармоники, включая свободный член.

2) *Ряд Фурье нечетной периодической функции содержит только синусы кратных дуг*, т. е. в его состав входят лишь нечетные гармоники.

Доказательство. 1) Пусть $f(x)$ — четная периодическая функция периода $2l$ и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье. На основании формулы (4), учитывая, что гармоники $\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — нечетные функции, и, сле-

довательно, функции $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ нечетные, имеем

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

Поэтому

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{6}$$

где, используя четность функций $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$, из формулы (3) получим

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}$$

2) Пусть теперь $f(x)$ — нечетная периодическая функция периода $2l$. Так как $\cos\frac{n\pi x}{l}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — функции четные, и, следовательно, функции $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ нечетные, то

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где, используя четность функций $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$, на основании формулы (3) имеем

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Теорема доказана.

§ 19. Понятие о рядах Фурье непериодических функций

Кусочно гладкую непериодическую функцию $f(x)$, заданную на бесконечной оси $-\infty < x < +\infty$, нельзя представить ее рядом Фурье, так как сумма его, будучи

суммой гармоник с общим периодом T, есть функция периодическая с тем же периодом T и, следовательно, не может быть равна функции $f(x)$ для всех x. Однако можно построить представление этой функции в виде соответствующего ряда Фурье на любом конечном промежутке.

Пусть интересующий нас промежуток есть $\langle -l, l\rangle$, т. е. симметричен относительно начала координат (этого всегда можно добиться путем параллельного сдвига оси Ox).

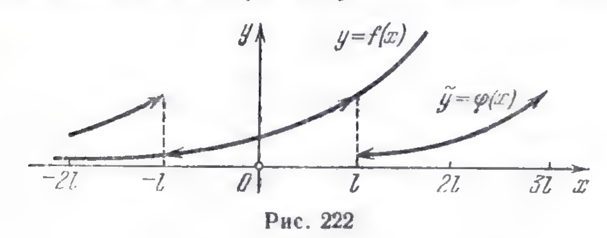


Рис. 222

Построим функцию $\varphi(x)$ периода $2l$ такую, что (рис. 222)

$$\varphi(x) \equiv f(x) \quad \text{при} \quad -l < x < l. \tag{1}$$

Предполагая, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы сходимости (§ 17), имеем

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$(-\infty < x < +\infty), \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi(x)\left\{\begin{matrix} \cos\frac{n\pi x}{l} \\ \sin\frac{n\pi x}{l} \end{matrix}\right. dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Отсюда на основании тождества (1) получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (-l < x < l), \tag{2'}$$

где

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\left\{\begin{matrix} \cos\frac{n\pi x}{l} \\ \sin\frac{n\pi x}{l} \end{matrix}\right. dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3'}$$

Подсчитаем сумму $S(x)$ ряда (2′), или соответствующего ряда (2), в концевых точках $x = \pm l$. Согласно общей

формуле (§ 17) имеем

$$S(l)=\frac{\varphi(l-0)+\varphi(l+0)}{2}. \qquad (4)$$

Но на основании тождества (1) и $2l$-периодичности функции $\varphi(x)$ геометрически очевидно (рис. 222), что

$$\varphi(l-0)=f(l-0), \quad \varphi(l+0)=\varphi(-l+0)=f(-l+0).$$

Поэтому из формулы (4) получаем

$$S(l)=\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}. \qquad (5)$$

Из $2l$-периодичности суммы $S(x)$ вытекает, что

$$S(-l)=S(l). \qquad (6)$$

Пример 1. Функция $f(x)=e^x$ разложена в ряд Фурье на промежутке $(-1, 1)$. Чему равна $S(1)$, где $S(x)$ — сумма ряда Фурье?

На основании формулы (5) имеем

$$S(1)=\frac{e^{1-0}+e^{-1+0}}{2}=\frac{e+e^{-1}}{2}=\operatorname{ch} 1=1{,}54.$$

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется представить рядом Фурье периода $2l$ на «полупериоде» $0<x<l$.

Полагая

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l, \\ f_1(x), & -l<x<0, \end{cases} \qquad (7)$$

где $f_1(x)$ — произвольная кусочно гладкая функция, из формул (2) и (3) получаем бесконечное множество рядов Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (0<x<l), \qquad (8)$$

дающих представление функции $f(x)$ на интервале $(0, l)$.

В частности, полагая $f_1(x)=f(-x)$ $(-l<x<0)$ в формуле (7) («четное продолжение»), будем иметь

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (0<x<l), \qquad (9)$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad (10)$$

Аналогично, полагая $f_1(x) = -f(-x)$ $(-l < x < 0)$ в формуле (7) («нечетное продолжение»), получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0 < x < l), \tag{11}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12}$$

Таким образом, *кусочно гладкую функцию, заданную на полупериоде, можно разложить в соответствующий ряд Фурье бесчисленным множеством способов. В частности, по желанию эту функцию на данном полупериоде можно представить*: 1) *в виде суммы четных гармоник или* 2) *в виде суммы нечетных гармоник.*

Пример 2. Функцию $f(x) = x$ разложить по косинусам кратных дуг в интервале $(0, \pi)$.

Заметим, что здесь функция $f(x)$ нечетная и требуется получить ее ряд Фурье, содержащий лишь четные гармоники. Это можно сделать, используя четное продолжение функции на $(-\pi, 0)$.

Полагая $l = \pi$, из формулы (9) будем иметь

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{13}$$

Используя формулу (10), находим

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

и

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overset{u}{x}\,d\overbrace{\left(\frac{\sin nx}{n}\right)}^{v} = \frac{2}{\pi}\left\{x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Отсюда

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеем

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right). \tag{14}$$

На рис. 223 изображены график функции $y=x$ и график суммы $\tilde{y}=S(x)$ ряда Фурье (14). При $0 \leqslant x \leqslant \pi$ они совпадают, а вне отрезка $[0, \pi]$ различны.

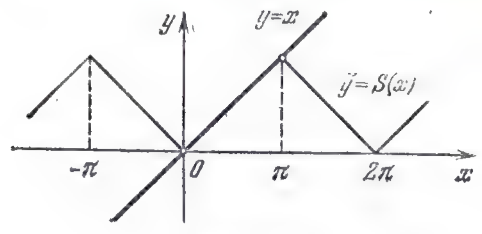


Рис. 223

Полагая $x=0$ в формуле (14), получаем замечательный числовой ряд (Эйлер)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{15}$$

Упражнения

Пользуясь необходимым признаком и признаком сравнения, исследовать сходимость рядов:

1. $1-1+1-1+\ldots$ 2. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

3. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right)+\ldots$

4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots$ 5. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ Указание. Сравнить с гармоническим рядом, умноженным на 1/2.

6. $1+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{9\sqrt{3}}+\ldots$

Пользуясь признаком Даламбера, выяснить сходимость рядов:

7. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots$ 8. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

9. $\frac{2}{1000}+\frac{2^2}{2000}+\frac{2^3}{3000}+\ldots$ 10. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots$

11. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$ 12. $\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots$

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

13. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

14. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$ 15. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots$

16. $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\frac{121}{64}-\ldots$

Определить интервалы сходимости степенных рядов и исследовать поведение их в граничных точках:

17. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ 18. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\dots$

19. $1!x+2!x^2+3!x^3+\dots$

20. $\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3}+\dots$

Разложить в ряд Маклорена функции:

21. $f(x)=a^x \quad (a>0)$. 22. $f(x)=\sin^2 x$.

23. Функцию $f(x)=\sqrt{x}$ разложить по целым возрастающим степеням разности $x-1$.

Пользуясь стандартными разложениями, представить в виде степенных рядов следующие функции:

24. $f(x)=e^{-x^2}$.

25. $f(x)=\cos^2 x$. Указание. $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$.

26. $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. 27. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. Пользуясь разложением в ряд, приближенно вычислить: а) $\sqrt{e}$; б) $\sin 18°$; в) $\sqrt[5]{1,2}$.

29. Приближенно вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} e^{x^2}\,dx$.

30. Вывести приближенную формулу для функции $f(x)=\int\limits_0^x \cos\sqrt{x}\,dx$, если $|x|$ — малая величина.

31. Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-\pi,\ \pi)$ функции:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x$; б) $f(x)=x^2$.

ГЛАВА XXII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия

Во многих вопросах геометрии, физики, механики, естествознания, техники и т. п. играют большую роль *дифференциальные уравнения*. Так называются уравнения, связывающие между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные различных порядков по x. Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Таким образом, общий вид дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже чем n. Например, уравнения

$$y' + \frac{2}{x} y = \sin x, \quad y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y''' + yy' = 0$$

имеют соответственно порядок: первый, второй и третий.

Дифференциальное уравнение (1) называется *линейным*, если левая часть его есть многочлен первой степени относительно неизвестной функции y и ее производных y', y'' ..., $y^{(n)}$ (и не содержит их произведений), т. е. если это уравнение имеет вид

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x). \tag{2}$$

Здесь функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, обычно определенные и непрерывные в некотором общем интервале, называются *коэффициентами* линейного уравнения, а функция $f(x)$ — *правой частью* или *свободным членом* его. Если правая часть $f(x)$ линейного уравнения (2) тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным* (или *без правой части*); в противном случае это

уравнение называется *неоднородным* (или *с правой частью*). Линейные дифференциальные уравнения находят многочисленные применения в приложениях.

Всякая функция

$$y = \varphi(x),$$

которая, будучи подставлена в уравнение (1), обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения. *Решить*, или *проинтегрировать*, данное дифференциальное уравнение — значит найти все его решения в заданной области. График решения называется *интегральной кривой*.

Заметим, что основная задача интегрального исчисления — отыскание функции y, производная которой равна данной непрерывной функции $f(x)$, — сводится к простейшему дифференциальному уравнению

$$y' = f(x).$$

Общее решение этого уравнения есть

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная и под интегралом понимается одна из первообразных функции $f(x)$[1]).

Выбирая надлежащим образом постоянную C, при условии непрерывности функции $f(x)$ можно получить любое решение этого простейшего дифференциального уравнения.

При интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков появляется несколько произвольных постоянных.

Пример 1. Рассмотрим уравнение второго порядка $y'' = 0$. Так как $y'' = (y')' = 0$, то отсюда следует $y' = C_1$. Интегрируя последнее равенство, будем иметь

$$y = \int C_1\,dx + C_2 = C_1 x + C_2. \tag{4}$$

---

[1]) Точнее, формулу (3) следует писать в виде

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C, \tag{3'}$$

где x_0 — некоторая начальная точка данной области. Формула вида (3′) удобна для приложений, так как позволяет явно выделить произвольную постоянную C. Это замечание следует иметь в виду и в дальнейшем.

Таким образом, решение (4) содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2, т. е. число произвольных постоянных в формуле (4) в точности равно порядку уравнения. Такое решение называется *общим решением уравнения*; в данном случае оно представляет всю бесконечную совокупность решений дифференциального уравнения.

Определение 1. *Общим решением дифференциального уравнения* (1) *называется такое решение его:*

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$ [1],

которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, каков порядок этого уравнения.

При этом произвольные постоянные называются *независимыми*, если общее число постоянных, входящих в состав функции φ, не может быть уменьшено путем введения других произвольных постоянных, непрерывно зависящих от данных.

Если общее решение задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0,$$

то оно обычно называется *общим интегралом.*

Определение 2. *Всякое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, если приписать определенные значения произвольным постоянным, в него входящим, называется* ***частным решением*** *этого дифференциального уравнения.*

Пример 2. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y''+y=0.$$

Легко сообразить, что функции $\sin x$ и $\cos x$ будут решениями этого уравнения, так как $(\sin x)''=-\sin x$ и $(\cos x)''=-\cos x$.

Как нетрудно проверить непосредственно, функция

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x,$$

где C_1 и C_2 — независимые произвольные постоянные, также является решением нашего уравнения и, следовательно, представляет собой общее решение его. Если мы, например, положим $C_1=2$ и $C_2=-5$, то получим функцию

$$y_1=2\sin x-5\cos x,$$

являющуюся частным решением данного дифференциального уравнения.

Если в результате решения дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то, подставив эту функцию в данное уравнение, можно проверить правильность решения.

---

[1]) Функция φ предполагается непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам достаточное число раз.

Пример 3. Показать, что функция $y=(C_1+C_2x)\,e^x$ есть решение уравнения

$$y''-2y'+y=0.$$

В самом деле, здесь

$$y'=(C_1+C_2x)\,e^x+C_2e^x=(C_1+C_2+C_2x)\,e^x$$

и

$$y''=(C_1+C_2+C_2x)\,e^x+C_2e^x=(C_1+2C_2+C_2x)\,e^x.$$

Следовательно,

$$y''-2y'+y=$$
$$=(C_1+2C_2+C_2x)\,e^x-2(C_1+C_2+C_2x)\,e^x+(C_1+C_2x)\,e^x\equiv 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка следующий:

$$F(x,\ y,\ y')=0.$$

В простейших случаях это уравнение может быть разрешено относительно производной y':

$$y'=f(x,\ y). \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y=\varphi(x,\ C), \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная. Геометрически общее решение (2) представляет собой *семейство интегральных кривых*, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной C (рис. 224). Интегральные кривые обладают тем свойством, что в каждой их точке $M(x,\ y)$ наклон касательной удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x,\ y).$$

Рис. 224

Если задать точку $M_0(x_0,\ y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая, то тем самым из бесконечного семейства интегральных кривых, в простейшем случае, выделяется некоторая определенная интегральная кривая, которая соответствует частному решению нашего дифференциального уравнения.

Аналитически это требование сводится к так называемому *начальному условию*: $y=y_0$ при $x=x_0$. Если

известно общее решение (2), то имеем

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

Из этого условия, вообще говоря, можно определить произвольную постоянную C и, следовательно, найти соответствующее частное решение. В этом состоит *задача Коши* (*начальная задача*).

З а д а ч а К о ш и. Найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее заданному начальному условию: $y_0 = \varphi(x_0)$, т. е. принимающее при $x = x_0$ заданное значение $y = y_0$.

Геометрически задачи Коши формулируются так: *найти интегральную кривую дифференциального уравнения* (1), *проходящую через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

Отметим следующее: дифференциальные уравнения являются математическим аппаратом, с помощью которого мы можем изучать процессы, протекающие в природе. Если условия задачи полностью определяют процесс, то он должен протекать о д н о з н а ч н о, т. е. решение дифференциального уравнения, дающее закон протекания процесса, должно быть е д и н с т в е н н ы м. Общее решение дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные и, следовательно, не дает определенного ответа на поставленный вопрос. Поэтому при решении конкретных задач, кроме дифференциального уравнения, нужны еще дополнительные условия. В простейшем случае, это — н а ч а л ь н ы е у с л о в и я, и мы приходим к задаче Коши.

В некоторых случаях дифференциальное уравнение (1) первого порядка выгодно записывать в форме

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1'}$$

или в форме

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — известные функции. Форма (3) удобна тем, что здесь переменные x и y р а в н о п р а в н ы, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Под р е ш е н и я м и уравнения (3), в общем случае, понимаются функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, заданные параметрически (t — параметр) и удовлетворяющие уравнению (3).

Не существует общего метода интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Обычно рассматривают лишь некоторые отдельные типы таких уравнений, для каждого из которых дается свой особый способ решения.

§ 3. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение. *Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет вид*

$$X(x)\,Y(y)\,dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ — функции только переменной x и $Y(y)$, $Y_1(y)$ — функции только переменной y.

Для решения уравнения (1) разделим обе части его на произведение $Y(y)\,X_1(x)$, предполагая, что оно не равно нулю. Тогда после очевидных сокращений получим

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0. \tag{2}$$

В уравнении (2) при dx стоит функция только от x, а при dy стоит функция только от y. В этом случае говорят, что *переменные разделены*. Беря интегралы от левой и правой частей равенства (2), будем иметь

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C. \tag{3}$$

Здесь под интегралами понимаются некоторые соответствующие первообразные.

Соотношение (3) и представляет собой общий интеграл уравнения (1).

В общем случае, деля на произведение $X_1(x)\,Y(y)$, мы рискуем потерять те решения уравнения (1), которые обращают это произведение в нуль.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция

$$x = a, \tag{4}$$

где a — корень уравнения $X_1(x) = 0$, т. е. $X_1(a) = 0$, есть решение уравнения (1). Также функция

$$y = b, \tag{5}$$

где b — корень уравнения $Y(y) = 0$, т. е. $Y(b) = 0$, также является решением уравнения (1).

Геометрически решения (4) и (5), если они существуют, представляют собой прямые линии, соответственно параллельные оси Oy и оси Ox.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{6}$$

Отсюда имеем

$$x\,dy = y\,dx.$$

Предположим, что $y \neq 0$. Если мы обе части этого уравнения разделим на xy, то переменные разделятся, и мы получим

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\int \frac{dy}{y}=\int \frac{dx}{x},$$

или

$$\ln y=\ln x+\ln C\,^{1)}. \tag{7}$$

Здесь произвольная постоянная взята в *логарифмической форме*, что законно, так как всякое действительное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа:

$$C_1=\ln C, \quad \text{где} \quad C=e^{C_1}.$$

Потенцируя равенство (7), окончательно получим

$$y=Cx \qquad (x \neq 0, \quad C \neq 0). \tag{8}$$

Полагая теперь $xy=0$ и учитывая, что $x \neq 0$, получим решение уравнения (6) $y=0$. Формально это решение получается из формулы (8) при $C=0$.

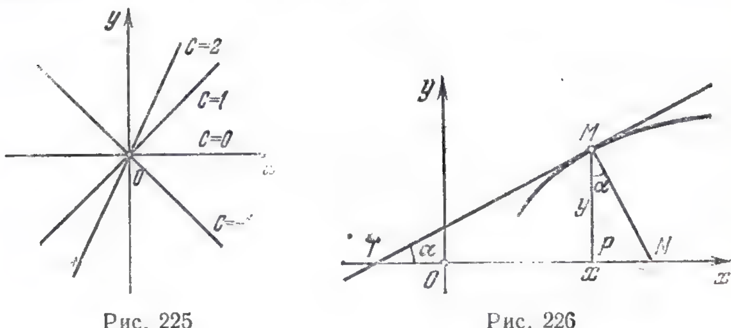


Рис. 225 Рис. 226

Общее решение (8), где C — любое действительное число, геометрически представляет собой семейство полупрямых, исходящих из начала координат (рис. 225).

П р и м е р 2. Найти кривую, проходящую через точку $Q(-1, 4)$ и обладающую тем свойством, что поднормаль ее в любой точке имеет одно и то же значение, равное 4.

Пусть $y=f(x)$ — искомая кривая, MT — касательная к этой кривой в точке $M(x, y)$, MN — нормаль (перпендикуляр к касательной в точке касания) (рис. 226). *Поднормалью* PN называется проекция отрезка нормали MN на ось Ox.

---

[1]) Строго говоря, мы должны писать

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln\overline{C},$$

где $\overline{C}>0$. Но допущенная нами «вольность» не отразится на окончательном результате, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Это следует иметь в виду и для дальнейшего.

Так как $PM = y$ и $\angle NMP = \angle MTP = \alpha$, то $PN = y \operatorname{tg} \alpha$. Но согласно геометрическому значению производной $\operatorname{tg} \alpha = y'$; поэтому для поднормали окончательно имеем такое выражение:

$$PN = yy'.$$

В силу условия задачи

$$yy' = 4, \quad \text{или} \quad y \frac{dy}{dx} = 4.$$

Разделяя переменные, получим

$$y\,dy = 4\,dx.$$

Взяв интегралы от правой и левой частей, будем иметь

$$\int y\,dy = 4 \int dx + C, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{2} = 4x + C.$$

Отсюда

$$y^2 = 8x + C_1. \tag{9}$$

Мы получим семейство парабол, вершины которых лежат на оси Ox.

Определим произвольную постоянную C_1 из условия, что наша парабола проходит через данную точку $Q(-1, 4)$. Подставляя в уравнение (8) вместо текущих координат координаты точки Q, находим $16 = -8 + C_1$; отсюда $C_1 = 24$.

Следовательно, уравнение искомой параболы имеет вид $y^2 = 8x + 24$, или

$$y^2 = 8(x+3).$$

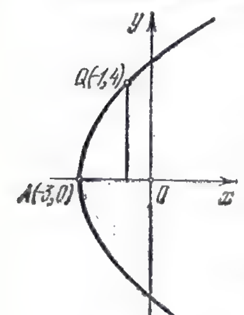


Рис. 227

Вершина параболы находится в точке $A(-3, 0)$, а осью ее служит ось Ox (рис. 227).

Пример 3. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20 °C. Известно, что в течение 20 минут тело охлаждается от 100 °C до 60 °C. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени.

Если обозначить время через t, а температуру тела через U, то скорость охлаждения тела, иначе, скорость изменения его температуры, будет равна производной $\frac{dU}{dt}$. Согласно условию задачи имеем

$$\frac{dU}{dt} = k(U - 20),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dU}{U-20} = k\,dt.$$

Взяв интегралы от левой и правой частей, будем иметь

$$\int \frac{dU}{U-20} = k \int dt + \ln C\ ^{1)},$$

[1]) Так как в дальнейшем мы будем потенцировать, то здесь выгодно писать $\ln C$ вместо C.

или

$$\ln(U-20)=kt+\ln C.$$

Отсюда $U-20=Ce^{kt}$ и, следовательно,

$$U=20+Ce^{kt}. \qquad (10)$$

Для определения постоянных C и k воспользуемся условиями задачи:

$$U=100 \quad \text{при} \quad t=0$$

и

$$U=60 \quad \text{при} \quad t=20.$$

Подставляя эти значения в уравнение (10), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}100&=20+C,\\ 60&=20+Ce^{20k}.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $C=80$, $e^{20k}=1/2$ и, следовательно,

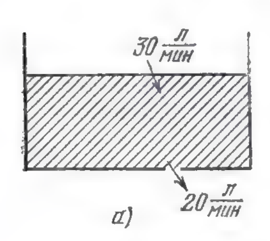
$$e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Внося эти значения в уравнение (10), окончательно получим

$$U=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Таков закон изменения температуры U в зависимости от времени t при указанных условиях.

В рассмотренных примерах 2 и 3 на составление дифференциальных уравнений мы имели дело непосредственно с производной искомой функции. Приведем пример, где рассуждения удобнее вести, оперируя с дифференциалами искомых величин.



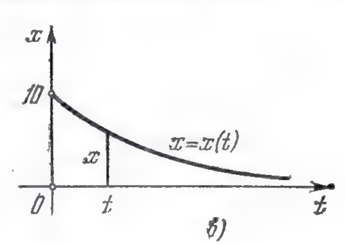


Рис. 228

Пример 4. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси (рис. 228, *а*). Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t и $x+dx$ — количество соли в момент времени $t+dt$. Так как смесь вытекает, то количество соли x уменьшается с течением времени и, следовательно, $dx<0$ при $dt>0$. Объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен

$$v=100+30t-20t=100+10t,$$

поэтому *концентрация соли* (т. е. количество соли, содержащейся в единице объема смеси) в момент времени t будет равна

$$\frac{x}{100+10t}. \tag{11}$$

Изменение количества соли $-dx$ за бесконечно малый промежуток времени $[t, t+dt]$ мы получим, если объем вытекшей за этот промежуток смеси $20dt$ умножим на концентрацию соли (11). Отсюда имеем дифференциальное уравнение

$$-dx=\frac{x}{100+10t}\cdot 20dt,$$

или

$$dx=-\frac{2x}{10+t}dt. \tag{12}$$

Кроме того, из условий задачи вытекает начальное условие

$$x|_{t=0}=10. \tag{13}$$

Разделяя переменные в уравнении (12) и интегрируя, последовательно получаем

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2}{10+t}dt$$

и

$$\int\frac{dx}{x}=-2\int\frac{dt}{10+t},$$

т. е.

$$\ln x=-2\ln(10+t)+\ln C$$

и, следовательно,

$$x=\frac{C}{(10+t)^2}.$$

Полагая $t=0$, из начального условия (13) находим $10=C/100$, т. е. $C=1000$. Поэтому закон изменения количества соли x в килограммах, находящейся в резервуаре, в зависимости от протекшего времени t в минутах (рис. 228, *б*) дается формулой

$$x=\frac{1000}{(10+t)^2}. \tag{14}$$

Заметим, что из формулы (14), зная количество соли, оставшейся в резервуаре (последнее легко установить, измеряя объем резервуара и концентрацию соли в нем), можно определить, сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Понятие однородного дифференциального уравнения первого порядка связано с *однородными функциями*.

Многочлен

$$P(x, y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j$$

называется *однородным* степени n, если все члены его имеют один и тот же порядок n, т. е. для каждого такого члена $a_{ij}x^iy^j$ имеем

$$i+j=n.$$

Например,

$$P(x, y)=2x^2-3xy-5y^2 \qquad (1)$$

есть однородный многочлен степени 2. Заметим, что если аргументы x и y однородного многочлена степени n заменить на пропорциональные величины kx и ky, то в результате этот многочлен умножится на n-ю степень коэффициента пропорциональности k. Так, например, для многочлена (1) имеем

$$P(kx, ky)=2(kx)^2-3(kx)(ky)-5(ky)^2=$$
$$=k^2(2x^2-3xy-5y^2)=k^2P(x, y).$$

Последнее свойство кладется в основу общего определения однородной функции.

Определение 1. *Функция $P(x, y)$ называется однородной степени n, если для любого числа k имеет место тождество*

$$P(kx, ky)\equiv k^nP(x, y).$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0. \qquad (2)$$

Определение 2. *Дифференциальное уравнение первого порядка* (2) *называется однородным, если коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ при дифференциалах переменных x и y суть однородные функции одной и той же степени.*

Можно доказать, что с помощью подстановки

$$u=\frac{y}{x}\quad\left(\text{или } v=\frac{x}{y}\right), \qquad (3)$$

где u — новая неизвестная функция, однородное дифференциальное уравнение (2) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(x+y)\,dx+x\,dy=0. \qquad (4)$$

Здесь $P=x+y$ и $Q=x$ — однородные функции первой степени, поэтому уравнение (4) однородное. Согласно указанию полагаем

$$\frac{y}{x}=u \qquad (5)$$

и

$$y = xu,$$

где u — неизвестная функция. Отсюда

$$dy = x\,du + u\,dx.$$

Подставляя это выражение в уравнение (4), будем иметь

$$(x + xu)\,dx + x\,(x\,du + u\,dx) = 0, \quad \text{или} \quad x\,du + (2u + 1)\,dx = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Для удобства умножим обе части последнего равенства на 2. Тогда, интегрируя почленно, будем иметь

$$\int \frac{2\,du}{2u+1} = -2\int \frac{dx}{x};$$

отсюда находим

$$\ln(2u+1) = -2\ln x + \ln C \quad \text{и} \quad 2u + 1 = \frac{C}{x^2}.$$

В силу формулы (5) имеем $\frac{2y}{x} + 1 = \frac{C}{x^2}$ и, следовательно,

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}, \tag{6}$$

где $C_1 = C/2$ — произвольная постоянная.

В процессе решения нам приходилось делить на функции x и $2u+1$. Приравнивая их нулю, получаем возможные решения:

1) $x = 0$ и 2) $2u + 1 = 0$; отсюда $y = -x/2$.

Обе функции 1) и 2), как легко убедиться проверкой, удовлетворяют данному уравнению (4); последняя получается из общего решения (6) при $C_1 = 0$.

Пусть теперь однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = f(x, y), \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{7}$$

Записывая последнее уравнение в дифференциалах, получим

$$dy = f(x, y)\,dx.$$

При dy стоит коэффициент, равный 1, т. е. однородная функция нулевой степени; следовательно, $f(x, y)$ также должна быть однородной функцией нулевой степени.

Таким образом, *дифференциальное уравнение* (7) *является однородным тогда и только тогда, когда правая часть его $f(x, y)$ есть однородная функция нулевой степени*[1]).

[1]) То есть правая часть этого уравнения не изменяется при замене x на kx и y на ky, где k — произвольный коэффициент пропорциональности.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид (см. § 1)

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \qquad (1)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — заданные функции. Если $a(x) \neq 0$, то уравнение (1) можно записать в приведенном виде

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad (2)$$

где $p(x) = b(x)/a(x)$ и $f(x) = -c(x)/a(x)$ ($f(x)$ — *свободный член* или *правая часть уравнения*). Мы будем предполагать, что коэффициент $p(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения (2) непрерывны на некотором интервале (a, b).

Для решения уравнения (2) искомую функцию y представим в виде произведения двух множителей:

$$y = uv, \qquad (3)$$

где u — некоторое ненулевое решение соответствующего однородного уравнения

$$u' + p(x)u = 0, \qquad (4)$$

а v — новая неизвестная функция. Так как

$$y' = vu' + uv', \qquad (5)$$

то, подставляя выражения (3) и (5) в дифференциальное уравнение (2), получим

$$v[u' + p(x)u] + uv' = f(x) \qquad (6)$$

или в силу (4) имеем

$$uv' = f(x). \qquad (7)$$

Заметим, что фактически функция u подбирается так, чтобы коэффициент при v в уравнении (6) был равен нулю.

Из уравнений (4) и (7) последовательно находятся функции u и v, причем для u выбирается какое-нибудь конкретное решение, отличное от нуля. Подставляя полученные выражения для функций u и v в формулу (3), найдем искомую функцию y.

Замечание. На практике нет необходимости линейное уравнение (1) приводить к виду (2); можно сразу применять подстановку (3).

Пример 1. Решить уравнение

$$xy' + 2y = x^2. \tag{8}$$

Уравнение (8), очевидно, линейное. Полагаем

$$y = uv, \quad y' = vu' + uv'. \tag{9}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8), получаем

$$v(xu' + 2u) + xuv' = x^2.$$

Подбираем функцию u так, чтобы

$$xu' + 2u = 0; \tag{10}$$

тогда

$$xuv' = x^2. \tag{11}$$

Из (10) последовательно получаем

$$x\frac{du}{dx} = -2u, \quad \frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x};$$

интегрируя, находим

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x}, \quad \text{т. е.} \quad \ln u = -2\ln x + \ln C_0,$$

и следовательно, выбирая $C_0 = 1$, получим

$$u = \frac{1}{x^2}. \tag{12}$$

Отсюда из (11) имеем $x \cdot \frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = x^2$, $\frac{dv}{dx} = x^3$ и, таким образом,

$$v = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C, \tag{13}$$

где C — произвольная постоянная.

Итак, на основании (12) и (13) окончательно находим

$$y = uv = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right), \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$(x + y)\,y' = 1, \tag{14}$$

удовлетворяющее начальному условию: $y = 0$ при $x = -1$.

По виду уравнение (14) не является линейным. Однако если рассматривать x как функцию от y, то, учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, получим линейное уравнение

$$x' = x + y. \tag{15}$$

Как обычно, положим

$$x = uv, \quad x' = \frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (15), будем иметь

$$v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy} = uv + y. \tag{16}$$

Отсюда, учитывая, что согласно выбору u

$$\frac{du}{dy}=u, \tag{17}$$

получаем

$$u\frac{dv}{dy}=y. \tag{18}$$

Из (17) находим частное решение

$$u=e^y. \tag{19}$$

Поэтому из (18) получаем

$$e^y\frac{dv}{dy}=y, \quad dv=ye^{-y}\,dy$$

и, значит,

$$v=\int ye^{-y}\,dy=-ye^{-y}-e^{-y}+C \tag{20}$$

(здесь было применено интегрирование по частям!) Из (19) и (20) находим *общее решение*

$$x=uv=-y-1+Ce^y. \tag{21}$$

Полагая здесь $y=0$ при $x=-1$, получим $-1=-1+C$, т. е. $C=0$. Таким образом,

$$x=-y-1, \quad \text{т. е. } y=-(x+1)$$

есть искомое *частное решение*.

Пример 3. Сила тока i в электрической цепи с омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \tag{22}$$

где E — электродвижущая сила (рис. 229, *а*). Найти силу тока i

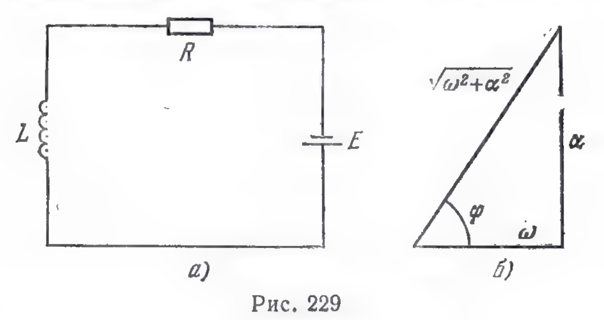


Рис. 229

через t секунд после момента включения, если E меняется по синусоидальному закону:

$$E=E_0\cos\omega t \tag{23}$$

и $i=0$ при $t=0$.

Из (22) имеем

$$\frac{di}{dt}+\alpha i=\frac{E_0}{L}\cos\omega t, \tag{24}$$

где для краткости положено $\alpha=R/L$.

Полагая $i=uv$, обычным приемом получим

$$\frac{du}{dt}+\alpha u=0 \quad \text{и} \quad u\frac{dv}{dt}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t. \tag{25}$$

Отсюда

$$\frac{du}{u}=-\alpha\,dt, \quad \ln u=-\alpha t$$

(постоянную интегрирования мы опускаем!) и

$$u=e^{-\alpha t}. \tag{26}$$

Из (25) имеем

$$e^{-\alpha t}\frac{dv}{dt}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t, \quad dv=\frac{E_0}{L}e^{\alpha t}\cos\omega t\,dt$$

и

$$v=\frac{E_0}{L}(I+C), \tag{27}$$

где

$$I=\int e^{\alpha t}\cos\omega t\,dt \tag{28}$$

(одна из первообразных).

Применяя двукратное интегрирование по частям, находим

$$I=\int e^{\alpha t}\,d\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)=e^{\alpha t}\frac{\sin\omega t}{\omega}-\int\frac{\sin\omega t}{\omega}\cdot\alpha e^{\alpha t}\,dt=$$

$$=e^{\alpha t}\frac{\sin\omega t}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega}\int e^{\alpha t}\cdot d\left(\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)=$$

$$=e^{\alpha t}\frac{\sin\omega t}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega}\left[e^{\alpha t}\frac{\cos\omega t}{\omega}-\int\frac{\cos\omega t}{\omega}\cdot\alpha e^{\alpha t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega}e^{\alpha t}\sin\omega t+\frac{\alpha}{\omega^2}e^{\alpha t}\cos\omega t-\frac{\alpha^2}{\omega^2}I;$$

откуда получаем

$$I=\frac{\frac{1}{\omega^2}e^{\alpha t}(\omega\sin\omega t+\alpha\cos\omega t)}{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2}}=\frac{e^{\alpha t}(\omega\sin\omega t+\alpha\cos\omega t)}{\omega^2+\alpha^2}. \tag{29}$$

Подставляя это выражение в формулу (27), находим

$$v=\frac{E_0}{L}\left(e^{\alpha t}\cdot\frac{\omega\sin\omega t+\alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+C\right), \tag{30}$$

где C — произвольная постоянная.

Перемножая функции u и v ((26) и (30)), получим закон изменения силы тока

$$i=\frac{E_0}{L}\left(\frac{\omega\sin\omega t+\alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+Ce^{-\alpha t}\right). \tag{31}$$

При $t=0$ из начального условия находим

$$0=\frac{E_0}{L}\left(\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}+C\right), \quad \text{т. е.} \quad C=-\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$i=\frac{E_0}{L(\omega^2+\alpha^2)}(\omega \sin \omega t+\alpha \cos \omega t-\alpha e^{-\alpha t}). \tag{32}$$

Если t достаточно велико, то $e^{-\alpha t}$ — малая величина ($\alpha > 0$) и ею в формуле (32) можно пренебречь. В таком случае будем иметь

$$i \approx \frac{E_0}{L(\omega^2+\alpha^2)}(\omega \sin \omega t+\alpha \cos \omega t). \tag{33}$$

Полагая (рис. 229, *б*) $\omega=\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\cos\varphi$, $\alpha=\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\sin\varphi$, из формулы (33) окончательно получим

$$i \approx \frac{E_0}{L\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}\sin(\omega t+\varphi)=\frac{E_0}{\sqrt{(L\omega)^2+R^2}}\sin(\omega t+\varphi),$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega}$ — начальная фаза тока.

§ 6. Понятие о методе Эйлера

В предыдущих параграфах мы рассмотрели простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих решения в квадратурах[1] (или, как иногда говорят: интегрирующихся в конечном виде!). Однако не существует общего метода для нахождения точного решения произвольного дифференциального уравнения первого порядка. Поэтому важное значение приобретают приближенные методы решений дифференциальных уравнений. Мы рассмотрим простейший из них, так называемый *метод Эйлера.*

Пусть на заданном отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant X$ требуется найти решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

с непрерывной правой частью $f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0)=y_0. \tag{2}$$

Геометрически это значит, что для дифференциального уравнения (1) нужно построить интегральную кривую $y=y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 230, *а*).

---

[1]) То есть решения которых выражаются с помощью неопределенных интегралов.

Из геометрического смысла производной получаем, что в каждой точке $M(x, y)$ интегральной кривой ее наклон (т. е. угловой коэффициент касательной) удовлетворяет условию

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f(x, y). \qquad (3)$$

Так как правая часть дифференциального уравнения (1) по предположению непрерывна, то можно считать, что

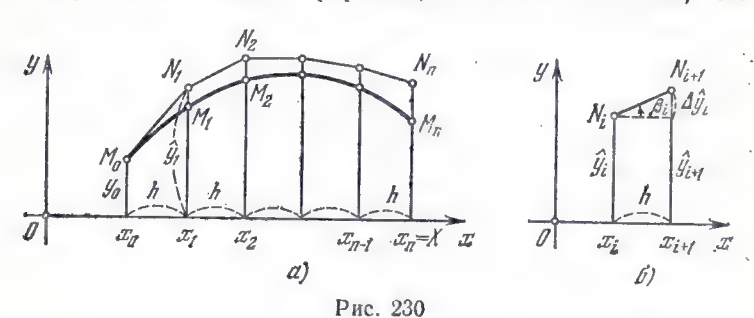


Рис. 230

на небольшом участке интегральной кривой ее наклон постоянен, т. е. эту кривую приближенно можно заменить ломаной линией.

Практически это делается так: разобьем отрезок $[x_0, X]$ на достаточно мелкие части: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, X]$, число которых равно n, и пусть

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

— длины соответствующих частичных отрезков. Для простоты будем считать их равными (хотя это не обязательно!). Тогда

$$h_i = \frac{X - x_0}{n} = h = \text{const}. \qquad (4)$$

Величина h называется *шагом процесса*.

Заменим кривую $M_0M_1M_2\ldots M_n$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ломаной $N_0N_1N_2\ldots N_n$ с вершинами $N_i(x_i, \hat{y}_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \hat{y}_0 = y_0)$, где $N_0 = M_0$, и последовательными наклонами

$$\operatorname{tg}\beta_i = f(x_i, \hat{y}_i) = \hat{y}'_i$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad \hat{y}'_0 = y'_0 = f(x_0, y_0)) \qquad (5)$$

(*полигон Эйлера*) (рис. 230, *а*). Из рис. 230, *б* имеем рас-

четные формулы

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, \\ \Delta\hat{y}_i &= h \operatorname{tg}\beta_i = hf(x_i, \hat{y}_i), \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \ \hat{y}_0 = y_0). \tag{6}$$

Заметим, что с механической точки зрения мы непрерывный процесс, описываемый дифференциальным уравнением (1), заменяем импульсным процессом, протекающим с постоянной скоростью на элементарных промежутках $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, скорость которого меняется скачками при переходе к последующему промежутку.

Недостатки метода: 1) малая точность при значительном шаге h, большой объем работы при малом шаге; 2) систематическое накопление ошибок.

Метод Эйлера служит идейной основой для других, более совершенных методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

Пример. Методом Эйлера на промежутке [0; 0,5] найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1. \tag{7}$$

Выберем шаг $h = 0,1$. Результаты вычисления (с точностью до 10^{-3}) занесены в таблицу:

x	$\hat{y}$	$\hat{y}' = x + \hat{y}$	$\Delta\hat{y} = \hat{y}'h$
0	1,000	1,000	0,100
0,1	1,100	1,200	0,120
0,2	1,220	1,420	0,142
0,3	1,362	1,662	0,166
0,4	1,528	1,928	0,193
0,5	1,721		

Таким образом, $\hat{y}(0,5) = 1,721$. Нетрудно найти точное решение (уравнение (7) — линейное!): $y = 2e^x - (x+1)$; отсюда $y(0,5) = 2\sqrt{e} - 1,5 \approx 2 \cdot 1,645 - 1,500 = 1,790$.

§ 7. Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной, следующий:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

Общее решение

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2) \tag{2}$$

этого уравнения содержит две независимые произвольные постоянные C_1 и C_2. Геометрически общее решение (2) представляет собой бесконечную совокупность интегральных кривых, зависящую от двух независимых параметров C_1 и C_2. Вообще говоря, через каждую точку $M_0(x_0,\ y_0)$ плоскости Oxy проходит пучок интегральных кривых (рис. 231). Поэтому, чтобы из нашего семейства интегральных кривых выделить одну определенную интегральную кривую Г, недостаточно указать точку $M_0(x_0,\ y_0)$, через которую должна проходить эта последняя кривая, а следует указать еще направление, в котором кривая Г проходит через точку M_0, т. е. задать тангенс угла α_0, образованного касательной к этой кривой в точке M_0 с положительным направлением оси Ox. Аналитически, если обозначить

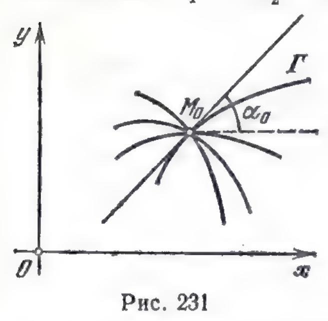


Рис. 231

$$\operatorname{tg}\alpha_0=y_0',$$

мы приходим к таким *начальным условиям*: $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=x_0$. На основании (2) имеем

$$\left.\begin{aligned} y_0&=\varphi(x_0,\ C_1,\ C_2),\\ y_0'&=\varphi_x'(x_0,\ C_1,\ C_2).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из системы (3) можно, вообще говоря, определить постоянные C_1 и C_2 и тем самым найти частное решение

$$y=\varphi(x),$$

удовлетворяющее нашему уравнению (1) и заданным начальным условиям

$$y\,|_{x=x_0}=y_0 \text{ и } y'\,|_{x=x_0}=y_0' \tag{4}$$

(*задача Коши*). Заметим, что при решении конкретных физических задач, как правило, наряду с дифференциальным уравнением фигурируют те или иные начальные условия (4), так как решение такой задачи, по понятным соображениям, должно быть однозначным.

С помощью дифференциального уравнения второго порядка записывается *основное уравнение динамики.*

Пусть материальная точка массы m движется по оси Ox под действием переменной силы F. Если обозначить через j ускорение этой точки, то согласно закону Ньютона имеем

$$mj = F. \tag{5}$$

В наиболее общем случае сила F зависит от времени t, от координаты x (характеризующей положение материальной точки на оси Ox) и от скорости $\frac{dx}{dt}$ этой точки. Следовательно,

$$F = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

С другой стороны, как известно (гл. X, § 14), для прямолинейного движения ускорение j равно второй производной от пути по времени, т. е. $j = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Подставляя величины F и j в уравнение (5), получим *дифференциальное уравнение движения точки*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

Чтобы полностью описать движение точки, нужно дополнительно задать начальное положение и начальную скорость точки

$$x\Big|_{t=t_0} = x_0 \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = v_0$$

(*начальные условия*).

§ 8. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений второго порядка

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка не может быть решено в конечном виде. Мы рассмотрим здесь некоторые простые случаи, когда уравнение второго порядка решается с помощью квадратур, т. е. применением операций неопределенного интегрирования.

Тип I. Пусть

$$y'' = f(x). \tag{1}$$

Интегрируя, будем иметь

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, окончательно получим

$$y=\int dx\int f(x)\,dx+C_1x+C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, и неопределенные интегралы трактуются как некоторые первообразные соответствующих функций.

Тип II. Пусть

$$y''=f(y). \tag{2}$$

Положим

$$y'=p.$$

Отсюда, рассматривая p как функцию от y, будем иметь

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

Следовательно, уравнение (2) примет вид

$$p\frac{dp}{dy}=f(y).$$

Разделяя переменные, получим

$$p\,dp=f(y)\,dy.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\frac{p^2}{2}=\int f(y)\,dy+\frac{C_1}{2},$$

или

$$p=\pm\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}.$$

Так как $p=\frac{dy}{dx}$, то предыдущее уравнение можно записать так:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}.$$

Отсюда, разделяя еще раз переменные и интегрируя, окончательно будем иметь

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}}=\pm(x+C_2).$$

Не стоит запоминать эту сложную формулу общего решения уравнения типа II, а следует усвоить способ интегрирования.

Тип III. Пусть

$$y'' = f(y'). \tag{3}$$

Полагаем

$$y' = p.$$

Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx}.$$

Уравнение (3) примет вид

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно будем иметь

$$\frac{dp}{f(p)} = dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

Определив из этого последнего уравнения величину $p = \frac{dy}{dx}$, путем вторичного интегрирования можно будет найти и y.

Пример 1. Определить закон движения материальной точки с массой m, брошенной с начальной скоростью v_0 вертикально вверх.

Вертикальную прямую, являющуюся траекторией движущейся точки, примем за ось Ox, при этом положительное направление оси Ox установим вверх. За начало координат O возьмем начальное положение нашей материальной точки.

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то единственная сила, действующая на нашу точку, есть сила тяжести, численно равная mg и направленная вертикально вниз. Согласно закону Ньютона имеем следующее дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{4}$$

Кроме того, должны быть соблюдены начальные условия:

$$x|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0. \tag{5}$$

Производя подстановку

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{и} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

из уравнения (4) получим

$$\frac{dv}{dt} = -g, \quad \text{или} \quad dv = -g\,dt.$$

Интегрируя, будем иметь

$$v = C_1 - gt.$$

Полагая здесь $t=0$ и используя второе условие (5), находим $C_1 = v_0$. Отсюда

$$v = v_0 - gt, \qquad (6)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt.$$

Интегрируя еще раз, будем иметь

$$x = C_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Для определения константы C_2 заметим, что в силу первого условия (5) $x=0$ при $t=0$. Подставляя эти значения в наше последнее уравнение, получим $C_2 = 0$. Следовательно,

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (7)$$

Таков закон движения материальной точки, брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (без учета сопротивления воздуха).

В частности, в наивысшей точке подъема должно быть $v=0$. Отсюда из уравнения (6) определяем **время подъема** $T = \frac{v_0}{g}$, а из уравнения (7) — соответствующую **высоту подъема** $H = \frac{v_0^2}{2g}$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' = y^{-3}$.

Полагаем здесь $y' = p$, отсюда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение, получим

$$p\frac{dp}{dy} = y^{-3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно будем иметь

$$p\,dp = y^{-3}\,dy \quad \text{и} \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}.$$

Отсюда

$$p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}} \qquad (C_1 > 0)$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}.$$

Это уравнение первого порядка. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\,dx.$$

Умножая обе части на C_1, получим

$$\frac{C_1 y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2-1}}=\pm C_1\,dx.$$

После интегрирования будем иметь

$$\int\frac{C_1 y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2-1}}=\pm(C_1 x+C_2).$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части уравнения. Замечая, что

$$C_1 y\,dy=\frac{1}{2}\,d\,(C_1 y^2-1),$$

будем последовательно иметь

$$\int\frac{C_1 y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\,(C_1 y^2-1)}{\sqrt{C_1 y^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int(C_1 y^2-1)^{-1/2}\,d\,(C_1 y^2-1)=\frac{\frac{1}{2}(C_1 y^2-1)^{1/2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{C_1 y^2-1}.$$

Таким образом, находим $\sqrt{C_1 y^2-1}=\pm(C_1 x+C_2)$, или окончательно

$$C_1 y^2-1=(C_1 x+C_2)^2.$$

Пример 3. Найти решение уравнения $2y'y''=1$, удовлетворяющее начальным условиям: $y=0$, $y'=1$ при $x=1$

Полагая $y'=p$ и $y''=\frac{dp}{dx}$, имеем

$$2p\,\frac{dp}{dx}=1.$$

Разделяя здесь переменные, получим

$$2p\,dp=dx,$$

или после интегрирования

$$p^2=x+C_1.$$

Для определения постоянной C_1 используем начальное условие $p=y'=1$ при $x=1$. Имеем $1=1+C_1$; отсюда $C_1=0$ и, следовательно,

$$p^2=x.$$

Извлекая корень, получим

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{x},$$

причем перед корнем взят знак плюс, так как при $x=1$ мы должны иметь $p=1$.

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$y=\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+C_2.$$

Для определения постоянной C_2 полагаем $x=1$ и $y=0$; тогда $0=\frac{2}{3}+C_2$, т. е. $C_2=-\frac{2}{3}$. Таким образом, искомое решение есть

$$y=\frac{2}{3}(x^{3/2}-1).$$

§ 9. Случаи понижения порядка

Укажем два случая, когда дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''=f(x, y, y') \tag{1}$$

приводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

Случай 1. Пусть правая часть дифференциального уравнения (1) явно не содержит x, т. е. уравнение имеет вид

$$y''=f(y, y'). \tag{2}$$

Полагая здесь

$$y'=p \quad \text{и} \quad y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p,$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p\frac{dp}{dy}=f(y, p),$$

где роль независимой переменной играет y.

Случай 2. Пусть правая часть дифференциального уравнения (1) явно не содержит y, т. е. уравнение имеет вид

$$y''=f(x, y'). \tag{3}$$

Полагая

$$y'=p \quad \text{и} \quad y''=\frac{dp}{dx},$$

получим уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx}=f(x, p)$$

с неизвестной функцией p.

Отметим, что рассмотренные выше типы II и III (§ 8) являются частными случаями соответственно уравнений (2) и (3).

Пример 1. Решить уравнение

$$y''=\frac{y'^2}{y}. \tag{4}$$

Согласно случаю 1 полагаем $y'=p$ и $y''=p\frac{dp}{dy}$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{p^2}{y}.$$

Отсюда: 1) $p=0$, т. е. $y=C$; или 2) $\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}$, т. е. $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$ и

$$\ln p=\ln y+\ln C_1.$$

Потенцируя, будем иметь

$$p=\frac{dy}{dx}=C_1y$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{y}=C_1\,dx.$$

После интегрирования получаем

$$\ln y=C_1x+\ln C_2$$

и, значит,

$$y=C_2e^{C_1x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$xy''=2x-y', \tag{5}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y=\frac{1}{2}$ и $y'=1$ при $x=1$.

В уравнении (5) полагаем $y'=p$ и $y''=\frac{dp}{dx}$. Тогда

$$x\frac{dp}{dx}=2x-p,$$

или

$$\frac{dp}{dx}=2-\frac{p}{x}. \tag{6}$$

Полученное уравнение — однородное[1]), поэтому примем $\frac{p}{x}=u$, следовательно,

$$p=xu \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

Подставляя в уравнение (6), будем иметь

$$x\frac{du}{dx}+u=2-u;$$

отсюда

$$\frac{du}{dx}=\frac{2-2u}{x}, \quad \text{или} \quad \frac{du}{u-1}=-\frac{2dx}{x}.$$

---

[1]) Уравнение (6) можно также рассматривить как линейное.

Интегрируя, получим

$$\ln(u-1) = -2\ln x + \ln C_1$$

и, следовательно,

$$u-1=\frac{C_1}{x^2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{p}{x}=1+\frac{C_1}{x^2} \quad \text{и} \quad p=x+\frac{C_1}{x}.$$

Для определения постоянной C_1 используем начальные условия: $p=y'=1$ при $x=1$. Получаем $1=1+C_1$, т. е. $C_1=0$ и, таким образом,

$$p=\frac{dy}{dx}=x.$$

Отсюда имеем $dy=x\,dx$ и

$$y=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_2. \qquad (7)$$

Постоянную C_2 определяем из начальных условий. Полагая $x=1$ и $y=1/2$ в формуле (7), получаем $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C_2$, т. е. $C_2=0$. Следовательно, искомое частное решение есть

$$y=x^2/2.$$

§ 10. Понятие об интегрировании дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Для простоты изложим этот метод на примере дифференциального уравнения первого порядка

$$y'=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0, \qquad (1)$$

где функция $f(x, y)$ бесконечно дифференцируема, т. е. имеет производные всех порядков.

Будем искать решение задачи (1) в виде ряда Тейлора (гл. XXI, § 14)

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots, \qquad (2)$$

где для краткости положено

$$y_0^{(n)}=y^{(n)}(x_0) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Свободный член y_0 ряда (2) определяется из начального условия (1). Коэффициент y_0' мы находим из дифференциального уравнения (1)

$$y_0'=f(x_0, y_0).$$

Для нахождения коэффициента y_0'' продифференцируем по x уравнение (1), предполагая, что y есть функция от x. Имеем

$$y''=\frac{d}{dx}[f(x, y)],$$

отсюда

$$y_0'' = \left\{ \frac{d}{dx} [f(x, y)] \right\} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

и т. д. Сложный вопрос о сходимости ряда (2) мы оставляем без рассмотрения.

Этот метод, с очевидными изменениями, применим также и для уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{3}$$

Пример. С помощью степенных рядов найти решение дифференциального уравнения

$$y' = xy + y^2, \quad y(0) = 1. \tag{4}$$

Положим

$$y = y_0 + y_0'x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \frac{y_0'''}{3!} x^3 + \ldots \tag{5}$$

Из условий (4) имеем $y_0 = 1$, $y_0' = 0 \cdot 1 + 1^2 = 1$.

Дифференцируя как сложную функцию правую часть уравнения (4), получим

$$y'' = (y + xy') + 2yy'; \tag{6}$$

отсюда $y_0'' = (1 + 0) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Далее, дифференцируя уравнение (6), будем иметь

$$y''' = (2y' + xy'') + 2(y'^2 + yy'')$$

и, следовательно, $y_0''' = (2 + 0) + 2 \cdot (1 + 1 \cdot 3) = 10$ и т. д.

Таким образом, из (5) имеем

$$y = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3 + \ldots \tag{7}$$

Результаты вычислений можно оформить в виде таблицы:

x	0	0,1	0,2	0,3	...
y	1	1,117	1,273	1,480	...

§ 11. Общие свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны.

Пусть

$$y_1 = y_1(x) \text{ и } y_2 = y_2(x)$$

— частные решения уравнения (1)[1].

Определение. *Два решения y_1 и y_2 называются линейно зависимыми, если можно подобрать постоянные числа a_1 и a_2, не равные одновременно нулю, такие, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю, т. е.*

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 \equiv 0. \qquad (2)$$

В противном случае, если таких чисел подобрать нельзя, решения y_1 и y_2 называются *линейно независимыми*. Иными словами, если функции y_1 и y_2 линейно независимы и имеет место тождество (2), то $a_1 = a_2 = 0$.

Очевидно, *решения y_1 и y_2 будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны друг другу*, т. е. если

$$y_2 = a y_1 \qquad (3)$$

(или наоборот), где a — постоянный коэффициент пропорциональности.

В самом деле, если выполнено условие (3), то можно записать

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 \equiv 0,$$

где $a_1 = a$ и $a_2 = -1 \neq 0$, и следовательно, эти решения являются линейно зависимыми.

Обратно, если решения y_1 и y_2 линейно зависимы, то имеет место тождество

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 \equiv 0,$$

где по меньшей мере одна константа, a_1 или a_2, не равна нулю. Полагая, например, что $a_2 \neq 0$ и $a = -a_1/a_2$, получим $y_2 = a y_1$.

Понятие линейной зависимости применимо также к любой паре функций. Аналогично определяются линейная зависимость и линейная независимость нескольких функций.

Пример. Функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$ при $k_2 \neq k_1$ линейно независимы.

В самом деле, допустим, что имеет место соотношение

$$a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} \equiv 0,$$

[1] Слово «частные» здесь понимается в том смысле, что эти решения не содержат произвольных постоянных.

где хотя бы один из коэффициентов a_1 и a_2, например a_2, не равен нулю. Тогда получим тождество

$$e^{(k_2-k_1)x}\equiv -a_1/a_2,$$

что невозможно, так как левая часть этого равенства меняется с изменением x, а правая часть постоянна.

Зная два частных линейно независимых решения y_1 и y_2 уравнения (1), легко получить общее решение этого уравнения. А именно, имеет место такая теорема.

Теорема. *Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения второго порядка* (1), *то общее решение уравнения есть линейная комбинация этих частных решений, т. е. общее решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — *произвольные постоянные* ($-\infty<C_1<+\infty$, $-\infty<C_2<+\infty$).

Доказательство. В самом деле, так как y_1 и y_2 — решения уравнения (1), то имеем

$$y_1''+p(x)\,y_1'+q(x)\,y_1\equiv 0 \tag{5}$$

и

$$y_2''+p(x)\,y_2'+q(x)\,y_2\equiv 0. \tag{6}$$

Подставляя выражение (4) в левую часть уравнения (1), в силу (5) и (6) получим

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+q(x)(C_1y_1+C_2y_2)=$$
$$=C_1y_1''+C_2y_2''+p(x)\,C_1y_1'+p(x)\,C_2y_2'+q(x)\,C_1y_1+q(x)\,C_2y_2=$$
$$=C_1[y_1''+p(x)\,y_1'+q(x)\,y_1]+C_2[y_2''+p(x)\,y_2'+q(x)\,y_2]=$$
$$=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{7}$$

будет решением уравнения (1) при любом выборе постоянных C_1 и C_2.

Если решения y_1 и y_2 линейно независимы, то решение (7) будет общим решением дифференциального уравнения (1), так как оно содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2, которые в этом случае не могут быть сведены к одной, т. е. являются независимыми.

Можно доказать, что формула (7) дает все решения соответствующего линейного дифференциального уравнения (1).

Замечание. Если же частные решения y_1 и y_2 линейно зависимы, то решение (4) не будет общим. В самом деле, пусть y_1 и y_2 линейно зависимы, т. е. пусть имеет место соотношение $y_2 = ay_1$, где a—некоторая константа. Подставляя y_2 в выражение (4), будем иметь

$$y = C_1y_1 + C_2ay_1,$$

или

$$y = Cy_1, \tag{8}$$

где $C = C_1 + aC_2$. Это решение содержит только одну произвольную постоянную C и потому оно не будет общим.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (1), достаточно знать два его частных линейно независимых решения y_1 и y_2.

§ 12. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

имеет постоянные коэффициенты p и q.

Будем искать частное решение уравнения (1) в форме

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

где k—постоянное число, подлежащее определению. Из (2) имеем

$$y' = ke^{kx} \text{ и } y'' = k^2e^{kx}.$$

Подставляя y, y' и y'' в уравнение (1), получим

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} \equiv 0$$

или, сокращая на множитель e^{kx}, который не равен нулю, находим

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Квадратное уравнение (3), из которого определяется число k, называется *характеристическим уравнением* данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (1). Заметим, что для написания характеристического уравнения (3) достаточно в дифференциальном уравнении (1) производные y'', y' и функцию y заменить на соответствующие степени величины k, рассматри-

вая при этом функцию y как производную нулевого порядка.

Решая характеристическое уравнение (3), получим

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (4)$$

Здесь могут представиться три различных случая.

Случай I. Если

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \qquad (5)$$

то согласно формуле (4) характеристическое уравнение (3) имеет два действительных и различных корня k_1 и k_2. Следовательно, линейное уравнение (1) допускает два различных частных решения

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Так как $k_1 \neq k_2$, то эти решения, как мы видели (§ 11, пример 1), линейно независимы. Следовательно, общее решение для случая I имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (6)$$

Пример. Пусть

$$y'' - 2y' - 8y = 0. \qquad (7)$$

Решая характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k - 8 = 0,$$

находим его корни $k_1 = 4$, $k_2 = -2$. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

Случай II. Если

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \qquad (8)$$

то в силу формулы (4) характеристическое уравнение (3) имеет единственный корень

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

Такой корень называется *кратным*. Поэтому одно частное решение уравнения (1) будет

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Всякое другое частное решение y_2, линейно независимое с y_1, обязательно должно иметь вид

$$y_2 = y_1 \cdot z(x), \tag{9}$$

где $z = z(x)$ — некоторая функция от x, не являющаяся тождественно постоянной. Отсюда

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} z.$$

Дифференцируя, находим

$$y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} z' + e^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p}{2}\right) z = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z' - \frac{p}{2} z\right)$$

и

$$y_2'' = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z'' - \frac{p}{2} z'\right) - \frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}x}\left(z' - \frac{p}{2} z\right) =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x}\left(z'' - pz' + \frac{p^2}{4} z\right).$$

Подставляя y_2, y_2' и y_2'' в уравнение (1), после сокращения на общий множитель $e^{-\frac{p}{2}x}$ получим

$$z'' - pz' + \frac{p^2}{4} z + pz' - \frac{p^2}{2} z + qz = 0,$$

или

$$z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) z = 0.$$

Наконец, в силу условия (8) будем иметь

$$z'' = 0.$$

Отсюда

$$z' = a \text{ и } z = ax + b,$$

где a и b — произвольные постоянные.

Следовательно,

$$y_2 = (ax + b) e^{-\frac{px}{2}}. \tag{10}$$

Так как мы интересуемся только частным решением, то можно принять $a = 1$ и $b = 0$. Тогда

$$y_2 = xe^{-\frac{px}{2}}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1) в случае II будет

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}(C_1+C_2x). \qquad (11)$$

Заметим, что формула (10), в сущности, уже давала это общее решение, так как всякое решение уравнения (1) можно представить в виде (10).

Пример 3. Пусть $y''-6y'+9y=0$.

Решая характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$, находим кратный корень $k_{1,2}=3\pm\sqrt{9-9}=3$. Следовательно, общее решение запишется в виде

$$y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

Случай III. Если

$$\frac{p^2}{4}-q<0,$$

то на основании формулы (4) характеристическое уравнение (3) имеет два сопряженных комплексных корня

$$k_1=\alpha+\beta i \text{ и } k_2=\alpha-\beta i,$$

где $\alpha=-\frac{p}{2}$ и $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Тогда частные решения y_1 и y_2 уравнения (1) будут такие:

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x} \text{ и } y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}\text{[1]}. \qquad (12)$$

Отсюда общее решение уравнения (1) формально можно записать так:

$$y=\bar{C}_1e^{(\alpha+\beta i)x}+\bar{C}_2e^{(\alpha-\beta i)x},$$

или

$$y=e^{\alpha x}(\bar{C}_1e^{i\beta x}+\bar{C}_2e^{-i\beta x}), \qquad (13)$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — некоторые комплексные константы, подобранные таким образом, чтобы выражение (13) было действительным.

---

[1]) *Под производной комплексной функции*

$$f_1(x)+if_2(x)$$

действительной переменной x, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — действительные функции от x, а i — мнимая единица, по определению понимают выражение

$$[f_1(x)+if_2(x)]'=f_1'(x)+if_2'(x).$$

Пользуясь формулой (4) из гл. XXI, § 16, легко проверить, что если $k=\alpha+i\beta$, то $(e^{kx})'=ke^{kx}$. Следовательно, функции y_1 и y_2, а также любая линейная комбинация их, удовлетворяют нашему дифференциальному уравнению.

В выражении (13) можно избавиться от мнимых величин. Согласно формулам Эйлера (гл. XXI, § 16) имеем

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x \quad \text{и} \quad e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x.$$

Отсюда

$$y=e^{\alpha x}\left[(\overline{C}_1+\overline{C}_2)\cos\beta x+i(\overline{C}_1-\overline{C}_2)\sin\beta x\right].$$

Полагая

$$\overline{C}_1+\overline{C}_2=C_1 \quad \text{и} \quad i(\overline{C}_1-\overline{C}_2)=C_2,$$

окончательно получим

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x), \tag{14}$$

где C_1 и C_2 — какие угодно (ввиду произвольности постоянных $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$) постоянные действительные числа. Это и есть общее решение в действительной форме уравнения (1) для случая III.

В частности, если в характеристическом уравнении (3) имеем $p=0$ и $q=\beta^2$, то корни $k_{1,2}=\pm\beta i$ будут чисто мнимыми ($\alpha=0$) и для соответствующего дифференциального уравнения

$$y''+\beta^2y=0$$

мы получим общее решение его в таком виде:

$$y=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x. \tag{15}$$

Замечание. В приложениях иногда используется другой вид формулы (14). А именно, полагая

$$C_1=A\sin\varphi \quad \text{и} \quad C_2=A\cos\varphi, \tag{16}$$

где A и φ — новые произвольные ($A\geqslant 0$) постоянные, будем иметь

$$y=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi). \tag{17}$$

Из (16) получаем

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{C_1}{C_2}.$$

Если x трактовать как время, то с физической точки зрения функция (17) описывает колебательный процесс, затухающий при $\alpha<0$ и неограниченно растущий при $\alpha>0$.

Пример 4. Имеем уравнение

$$y''-6y'+13y=0.$$

Решая характеристическое уравнение $k^2-6k+13=0$, получим комплексные корни $k_{1,2}=3\pm 2i$. Здесь $\alpha=3$ и $\beta=2$. Следователь-

но, на основании формулы (14) общее решение запишется в виде

$$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Пример 5. Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру O с силой, пропорциональной удалению x точ-

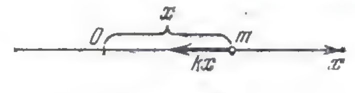


Рис. 232

ки от притягивающего центра (упругая сила) (рис. 232). Найти закон движения этой точки (пренебрегая сопротивлением среды).

Согласно закону Ньютона имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности и знак минус поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещению x. Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0, \quad \text{где} \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Мы получили линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни соответствующего характеристического уравнения

$$k^2+\omega^2=0$$

являются чисто мнимыми: $k_{1,2}=\pm\omega i$. Поэтому в силу формулы (14) ($\alpha=0$, $\beta=\omega$) имеем

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$$

Можно положить $C_1=A\sin\varphi$, $C_2=A\cos\varphi$, где A и φ — некоторые другие произвольные постоянные. Отсюда

$$x=A\sin(\omega t+\varphi),$$

т. е. материальная точка в наших условиях совершает периодические гармонические колебания около притягивающего центра с *амплитудой* A и *начальной фазой* φ.

§ 13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

где p и q — данные постоянные числа и $f(x)$ (правая часть уравнения) — известная функция от x. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Общее решение неоднородного уравнения* (1) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения*

$$\overline{y}'' + p\overline{y}' + q\overline{y} = 0 \tag{2}$$

и частного решения данного неоднородного уравнения.

Доказательство. Пусть

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{3}$$

есть общее решение уравнения без правой части (2) и z есть некоторое частное решение соответствующего уравнения с правой частью (1). Очевидно, имеем

$$\overline{y}'' + p\overline{y}' + q\overline{y} = 0 \quad \text{и} \quad z'' + pz' + qz = f(x).$$

Складывая почленно эти уравнения и учитывая, что производная суммы равна сумме производных, получим

$$(\overline{y} + z)'' + p(\overline{y} + z)' + q(\overline{y} + z) = f(x).$$

Отсюда ясно, что функция

$$y = \overline{y} + z \tag{4}$$

будет решением уравнения (1) и при этом общим, так как в ее состав, в силу формулы (3), входят две независимые произвольные постоянные C_1 и C_2.

Так как мы умеем находить общее решение $\overline{y}$ однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, то остается лишь указать способ нахождения частного решения z соответствующего неоднородного уравнения (1), где p и q — постоянные.

При рассмотрении этой последней задачи мы ограничимся лишь простейшими правыми частями $f(x)$. В этих случаях для нахождения частного решения уравнения (1) обычно применяется так называемый метод неопределенных коэффициентов.

Случай I. Правая часть уравнения (1) есть показательная функция

$$f(x) = ae^{mx} \quad (a \neq 0).$$

Ищем частное решение z также в форме показательной функции

$$z = Ae^{mx}, \tag{5}$$

где A — неопределенный коэффициент. Отсюда

$$z' = Ame^{mx} \quad \text{и} \quad z'' = Am^2e^{mx}.$$

Подставляя $f(x)$ и выражения для z и его производных в уравнение (1), после сокращения на e^{mx} будем иметь

$$A(m^2+pm+q)=a. \qquad (6)$$

Возможны два случая: 1) m не является корнем характеристического уравнения, т. е.

$$m^2+pm+q\neq 0.$$

Тогда $A=\frac{a}{m^2+pm+q}$ и, следовательно,

$$z=\frac{ae^{mx}}{m^2+pm+q}.$$

2) Число m есть корень характеристического уравнения, т. е.

$$m^2+pm+q=0. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (6) противоречиво и, следовательно, дифференциальное уравнение (1) не имеет частного решения в форме (5).

В этом случае а) если m есть простой корень характеристического уравнения (т. е. другой корень этого уравнения отличен от m), то частное решение уравнения (1) следует брать в виде

$$z=Axe^{mx},$$

и б) если же m — кратный корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (1) нужно искать в виде

$$z=Ax^2e^{mx}.$$

Эту рекомендацию можно непосредственно проверить.

Пример 1. Пусть $y''-5y'+6y=e^x$.

Решим сначала уравнение без правой части:

$$\bar{y}''-5\bar{y}'+6\bar{y}=0.$$

Характеристическое уравнение здесь имеет вид $k^2-5k+6=0$. Отсюда корни его будут $k_1=3$, $k_2=2$. Следовательно, общее решение уравнения без правой части таково:

$$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}.$$

Так как $m=1$ не является корнем характеристического уравнения, то ищем частное решение уравнения с правой частью в следующей форме:

$$z=Ae^x,$$

где A — неопределенный коэффициент. Дифференцируя, будем иметь

$$z'=Ae^x,\ z''=Ae^x.$$

Подставляя эти выражения в наше неоднородное уравнение, получим

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x \text{ или } 2A = 1.$$

Отсюда $A = 1/2$. Итак, частное решение уравнения с правой частью есть

$$z = \frac{1}{2} e^x.$$

Общее же решение этого уравнения на основании предыдущей теоремы имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^x.$$

Случай II. Правая часть неоднородного уравнения (1) есть тригонометрический полином

$$f(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x. \tag{8}$$

Ищем частное решение z этого уравнения также в форме тригонометрического полинома

$$z = A \cos \omega x + B \sin \omega x,$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

Дифференцируя, получим

$$z' = -A\omega \sin \omega x + B\omega \cos \omega x \text{ и } z'' = -A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \sin \omega x.$$

Отсюда, подставляя эти выражения в уравнение (1) и собирая вместе члены с $\cos \omega x$ и $\sin \omega x$, будем иметь

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq) \cos \omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq) \sin \omega x \equiv$$
$$\equiv M \cos \omega x + N \sin \omega x.$$

Так как последнее равенство представляет собой тождество, то коэффициенты при $\cos \omega x$ и $\sin \omega x$ в левой и правой частях этого равенства должны быть соответственно равны друг другу, и мы получим

$$A(q - \omega^2) + Bp\omega = M, \quad -Ap\omega + B(q - \omega^2) = N. \tag{9}$$

Из этой системы, вообще говоря, мы и сможем определить коэффициенты A и B. Единственный случай, когда система (9) несовместна, это

$$p = 0, \quad q = \omega^2$$

(т. е. когда $\pm i\omega$ — корни характеристического уравнения). Тогда частное решение z следует брать в такой форме:

$$z = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x).$$

Пример 2. Пусть

$$y'' - 4y' + 4y = \cos x. \qquad (10)$$

Соответствующее однородное уравнение будет

$$\overline{y}'' - 4\overline{y}' + 4\overline{y} = 0. \qquad (11)$$

Решая характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$, находим кратный корень $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения (11) есть

$$\overline{y} = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Будем искать частное решение уравнения (10) в такой форме:

$$z = A\cos x + B\sin x,$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

Дифференцируя, получим

$$z' = -A\sin x + B\cos x, \quad z'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя z, z' и z'' в уравнение (10), будем иметь

$$-A\cos x - B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x + 4A\cos x + 4B\sin x = \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ справа и слева, получим систему

$$3A - 4B = 1, \quad 4A + 3B = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, находим $A = 3/25$ и $B = -4/25$ и, следовательно,

$$z = \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x.$$

Отсюда общее решение уравнения (10) будет иметь вид

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x.$$

Пример 3. Изучить колебания материальной точки массы m, находящейся под действием упругой силы, величина которой пропорциональна отклонению x точки от положения равновесия, при наличии периодической возмущающей силы, численно равной

$$F = F_0 \sin pt$$

(F_0, p — постоянные). Сопротивлением среды пренебрегаем.

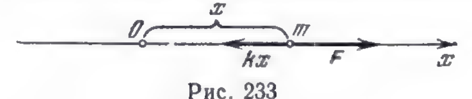


Рис. 233

Согласно закону Ньютона дифференциальное уравнение движения точки имеет вид (рис. 233)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \sin pt$$

(k — коэффициент пропорциональности) или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a\sin pt, \qquad (12)$$

где $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ и $a=\frac{F_0}{m}$. Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}+\omega^2\overline{x}=0,$$

как известно (см. § 12, пример 5), имеет вид (*свободные колебания точки*)

$$\overline{x}=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При нахождении частного решения z неоднородного уравнения (12) следует различать два случая.

Случай 1. Пусть $p\neq\omega$, т. е. частота внешней силы не совпадает с частотой свободных колебаний (13).

Полагаем

$$z=A\cos pt+B\sin pt, \tag{14}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

Подставляя выражение (14) в уравнение (12), будем иметь

$$-Ap^2\cos pt-Bp^2\sin pt+\omega^2(A\cos pt+B\sin pt)=a\sin pt,$$

или

$$A(\omega^2-p^2)\cos pt+B(\omega^2-p^2)\sin pt=a\sin pt.$$

Отсюда

$$A(\omega^2-p^2)=0,\ B(\omega^2-p^2)=a$$

и, следовательно, $A=0$, $B=\frac{a}{\omega^2-p^2}$. Таким образом,

$$z=\frac{a}{\omega^2-p^2}\sin pt.$$

Общее решение неоднородного уравнения (12) (*вынужденные колебания точки*) дается формулой

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{a}{\omega^2-p^2}\sin pt \tag{15}$$

и представляет собой наложение двух колебаний с частотами ω и p, причем колебания ограничены.

Случай 2. Пусть $p=\omega$, т. е. частота внешней силы совпадает с частотой свободных колебаний (13).

В этом случае формула (15), очевидно, теряет смысл. Полагаем

$$z=t(A\cos\omega t+B\sin\omega t);$$

отсюда

$$z'=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+t(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)$$

и

$$z''=2(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)+t(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12), будем иметь

$$2(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)-\omega^2 t(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+$$
$$+\omega^2 t(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=a\sin\omega t,$$

или

$$2(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)=a\sin\omega t.$$

Отсюда для определения неопределенных коэффициентов A и B имеем систему

$$-2A\omega = a, \ 2B\omega = 0.$$

Следовательно, $A = -a/2\omega$, $B = 0$ и, значит,

$$z = -\frac{at}{2\omega}\cos\omega t$$

(рис. 234). Вынужденные колебания точки при этом будут

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{at}{2\omega}\cos\omega t. \qquad (16)$$

Формула (16) показывает, что размах колебаний x неограниченно растет вместе с временем t. Таким образом, даже ничтожно

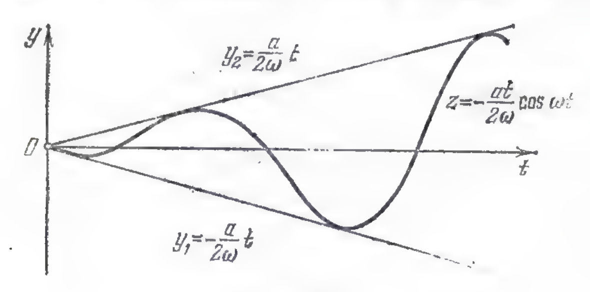


Рис. 234

малая внешняя сила в случае 2 вызывает неограниченные колебания системы. Это явление носит название *резонанса*. Физическим последствием резонанса является нарушение работы и даже разрушение упругой системы. Например, известны случаи, когда ритмические стуки поезда, идущего по железнодорожному мосту, приводили к разрушению этого моста.

Случай III. Правая часть линейного уравнения (1) представляет собой полином, например, второй степени

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \qquad (17)$$

Ищем частное решение z этого уравнения также в форме полинома второй степени

$$z = Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B и C — неопределенные коэффициенты.

Дифференцируя, будем иметь

$$z' = 2Ax + B \text{ и } z'' = 2A.$$

Отсюда, подставляя z, z' и z'' в уравнение (1), получим

$$2A + p(2Ax + B) + q(Ax^2 + Bx + C) \equiv ax^2 + bx + c,$$

или

$$Aqx^2+(2Ap+Bq)x+(2A+Bp+Cq)\equiv ax^2+bx+c.$$

Так как два многочлена тождественно равны друг другу тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях переменной x равны, то для определения коэффициентов A, B и C имеем систему

$$Aq=a,\ 2Ap+Bq=b,\ 2A+Bp+Cq=c. \qquad (18)$$

Если $q\neq 0$, то из этой системы для коэффициентов A, B и C получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение z будет вполне определено.

Если же $q=0$ (характеристическое уравнение имеет простой нулевой корень), то система (18) несовместна. В этом случае, полагая, что $p\neq 0$, частное решение z следует искать в форме

$$z=x(Ax^2+Bx+C).$$

Аналогично нужно поступать, если $f(x)$ есть полином какой-нибудь другой степени.

Пример 4. Пусть $y''-4y'+13y=2x+1$.

Уравнение без правой части здесь будет

$$\overline{y}''-4\overline{y}'+13\overline{y}=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2-4k+13=0$, его корни $k_{1,2}=2\pm 3i$. Общее решение однородного уравнения запишется так:

$$\overline{y}=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в такой форме:

$$z=Ax+B.$$

Отсюда $z'=A$ и $z''=0$. Подставляя эти выражения в неоднородное уравнение, получим

$$-4A+13(Ax+B)\equiv 2x+1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего тождества, будем иметь

$$13A=2;\ -4A+13B=1.$$

Решая совместно эту систему уравнений, получим $A=2/13$, $B=$ $=21/169$. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения есть

$$z=\frac{2}{13}x+\frac{21}{169}.$$

Поэтому его общее решение имеет вид

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{2}{13}x+\frac{21}{169}.$$

Произвольные постоянные, входящие в общее решение, могут быть определены из начальных условий.

Пример 5. Найти решение $y=y(x)$ уравнения

$$y''=x^2+y \tag{19}$$

такое, что

$$y(0)=-2,\ y'(0)=1. \tag{20}$$

Запишем уравнение (19) в стандартном виде

$$y''-y=x^2. \tag{21}$$

Однородное уравнение здесь следующее:

$$\overline{y}''-\overline{y}=0.$$

Характеристическое уравнение $k^2-1=0$ имеет корни $k_1=1$ и $k_2=-1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Для нахождения частного решения z неоднородного уравнения (21) полагаем

$$z=Ax^2+Bx+C.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (21), будем иметь

$$2A-(Ax^2+Bx+C)\equiv x^2.$$

Отсюда

$$-A=1,\ -B=0,\ 2A-C=0;$$

следовательно, $A=-1$, $B=0$, $C=-2$ и $z=-x^2-2$.

Общее решение неоднородного уравнения (19) имеет вид

$$y=\overline{y}+z,$$

или

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-(x^2+2). \tag{22}$$

Дифференцируя, находим

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-2x. \tag{23}$$

Полагая $x=0$ в формулах (22) и (23) и используя начальные условия (20), для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$C_1+C_2=0,\ C_1-C_2=1.$$

Отсюда $C_1=1/2$, $C_2=-1/2$.

Подставляя эти значения в формулу (22), получим искомое решение

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})-(x^2+2),\ \text{т. е.}\ y=\operatorname{sh}x-(x^2+2).$$

§ 14. Понятие о дифференциальных уравнениях, содержащих частные производные

Пусть функция u описывает некоторый физический процесс. Всякий процесс протекает в пространстве, точки которого можно характеризовать декартовыми прямоугольными координатами $(x,\ y,\ z)$ и во времени t. Поэтому

в общем случае функция u является функцией четырех переменных: $u=u(x, y, z, t)$[1]. Дифференцируя функцию u, получаем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и т. д. В данном процессе эти производные связаны известными соотношениями, и таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению, содержащему частные производные.

Математики Советского Союза внесли существенный вклад в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Особо следует отметить работы: М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, И. Г. Петровского, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова и др.

Для физических приложений особый интерес представляют дифференциальные уравнения, для которых входящие в них старшие частные производные имеют второй порядок (так называемые *дифференциальные уравнения второго порядка*). К числу их относятся уравнения газовой динамики, уравнения гидродинамики, математические уравнения электромагнетизма (уравнения Максвелла) и многие другие. Поэтому дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка получили название *уравнений математической физики.*

Для случая двух независимых переменных приведем важнейшие типы таких уравнений.

I. *Одномерное волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение встречается при изучении ряда колебательных процессов (поперечные колебания упругой струны, продольные колебания стержня, колебание глаз в трубке и др.).

II. *Уравнение теплопроводности* (уравнение Фурье)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

описывающее нестационарный тепловой режим стержня (см. § 14).

С этим уравнением связана также задача о распространении электрических колебаний в линии.

III. *Уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

дающее стационарное распределение температуры в однородной пластинке и др.

---

[1] В некоторых случаях можно ограничиться рассмотрением плоскости или прямой линии; соответственно этому снижается число независимых переменных функции u.

Для решения этих уравнений в различных условиях были созданы специальные приемы (так называемые «методы математической физики»).

Ограничимся для простоты случаем двух независимых переменных x, y:

$$u = u(x, y)$$

и введем сокращенные обозначения $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$ и т. п. Тогда общий вид дифференциального уравнения второго порядка для неизвестной функции u следующий:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \tag{1}$$

где F — известная функция.

Всякая функция $u = \varphi(x, y)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется его *решением*; график решения носит название *интегральной поверхности*.

Пример 1. Найти $u = u(x, y)$, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{3}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial y}$ не зависит от y, т. е. является функцией только переменной x. Таким образом, из (3) вытекает

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_1(x), \tag{4}$$

где $C_1(x)$ — произвольная функция.

Интегрируя уравнение (4) по переменной y, получим

$$u = \int C_1(x)\, dy\ ^{1)}, \tag{5}$$

или

$$u = C_1(x)\, y + C_2(x), \tag{6}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — произвольные функции. С помощью дифференцирования легко убедиться, что решение общего

[1]) В интеграле (5) переменная x предполагается постоянной, причем для каждого фиксированного x можно брать свою произвольную постоянную C_2. Поэтому $C_2 = C_2(x)$.

вида (6), содержащее произвольные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, дает здесь совокупность всех решений дифференциального уравнения (2). Таким образом, решением дифференциального уравнения (2) является произвольная функция, линейная относительно переменной y.

Отметим, что общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений содержат произвольные постоянные; для дифференциальных уравнений с частными производными их решения общего вида включают произвольные функции.

Конкретизируя функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формуле (6), получим частные решения уравнения (2). Например, полагая $C_1(x)=\sin x$, $C_2(x)=\cos x$, будем иметь частное решение $u=y\sin x+\cos x$ и т. п.

Дифференциальные уравнения с частными производными, как правило, имеют бесконечное число решений (см., например, пример 1). Решение же физической проблемы, описываемой дифференциальным уравнением, по смыслу, должно быть однозначным; иначе оно не дает возможности прогнозировать соответствующее физическое явление и, следовательно, является малоценным для практики. Поэтому при решении задач физического содержания, кроме дифференциального уравнения, должны быть использованы дополнительные условия, позволяющие из бесконечной совокупности решений данного дифференциального уравнения выделить единственное его решение, дающее закон функционирования рассматриваемого физического процесса. В простейшем случае это так называемые начальные и краевые условия. Грубо говоря, первые характеризуют данный процесс в начальный момент времени, а вторые описывают поведение процесса на границе рассматриваемой области. Начальные и краевые условия задачи называются граничными условиями.

Если в уравнении (1) переменную y интерпретировать как время, то простейшие начальные условия для неизвестной функции u имеют вид

$$u(x, y_0)=f(x), \quad u_y(x, y_0)=f_1(x), \tag{7}$$

где $f(x)$ и $f_1(x)$ — заданные функции. Нахождение функции u, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям (7), носит название *задачи Коши*.

Пример 2. Найти решение $u=u(x, y)$ уравнения $u_{yy}=0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 1)=x^2, \quad u_y(x, 1)=x.$$

На основании формулы (6) будем иметь

$$u=C_1(x)y+C_2(x), \quad u_y=C_1(x). \tag{8}$$

Полагая $y=1$ в формулах (8), получим

$$x^2=C_1(x)+C_2(x), \quad x=C_1(x); \tag{9}$$

отсюда $C_1(x)=x$, $C_2(x)=x^2-x$ и, следовательно,

$$u=xy+(x^2-x). \qquad (10)$$

Решение u — единственно.

Физическая задача, описываемая дифференциальным уравнением с частными производными, а также граничными условиями, называется *корректно поставленной*, если: 1) эта задача имеет решение; 2) решение задачи единственно; 3) решение задачи непрерывно зависит от граничных условий.

Действительно, прежде чем решать задачу, нужно убедиться, что эта задача вообще разрешима. В истории науки известны многочисленные примеры, когда люди затрачивали массу труда и времени в поисках решения задач, не имеющих решения. Так, например, около 2000 лет многие математики пытались разрешить задачу о «квадратуре круга», т. е. с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу, и лишь в конце XIX столетия доказано, что это невозможно. Аналогично, в химии оказались бесплодными поиски «философского камня», переводящего неблагородные металлы в благородные. Гарантию разрешимости рассматриваемой задачи дает «теорема существования решения».

Что касается второго требования, то, как было отмечено выше, неоднозначные решения задачи малопригодны для практики. Однозначность решения обеспечивается «теоремой единственности».

Наконец, нарушение третьего условия приводит к нежелательным последствиям. С точки зрения практики это плохо, если ничтожно малые изменения начальных или краевых условий (в реальной обстановке они известны лишь приближенно) влекут значительное изменение решения задачи в данной области! Поэтому тут нужна «теорема гладкости решений».

В последнее время возник интерес к некорректно поставленным задачам. Здесь основополагающие результаты были получены А. Н. Тихоновым.

§ 15. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными

Определение. *Дифференциальное уравнение называется* **линейным** *(точнее,* **вполне линейным***), если оно является целым многочленом первой степени относительно неизвестной функции и ее производных и, в частности, не содержит их произведений.*

Таким образом, общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка следующий:

$$A(x, y)u_{xx}+B(x, y)u_{xy}+C(x, y)u_{yy}+ +a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y), \qquad (1)$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — известные **коэффициенты** и $f(x, y)$ — заданный **свободный член**. Если $f(x, y)\equiv 0$, то линейное уравнение (1) называется *однородным* (без свободного члена);

в противном случае уравнение (1) называется *неоднородным*.

Вводя сокращенное обозначение

$$L[u]=A(x,\ y)\,u_{xx}+B(x,\ y)\,u_{xy}+C(x,\ y)\,u_{yy}+\\ +a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+c(x,\ y)\,u$$

(здесь L — так называемый *линейный дифференциальный оператор*), уравнение (1) можно записать в компактном виде

$$L[u]=f(x,\ y). \tag{1'}$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$L[u]=0 \tag{2}$$

обладает следующим важным свойством: *любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами решений линейного однородного дифференциального уравнения есть также решение этого уравнения* (ср. § 11). В частности, *сумма любого числа решений линейного однородного дифференциального уравнения есть также решение этого уравнения* (принцип наложения решений).

Не проводя доказательства в общем виде, ограничимся примером, выясняющим идею доказательства. Пусть дано однородное уравнение

$$L[u]\equiv u_{xx}-xu_{yy}=0 \tag{3}$$

и u_1, u_2 — его решения, т. е. $L[u_1]=0$, $L[u_2]=0$.

Рассмотрим, например, функцию

$$\hat{u}=2u_1-3u_2. \tag{4}$$

Из (3) имеем

$$L[\hat{u}]=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_1-3u_2)-x\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_1-3u_2)=\\ =2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)-3\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)=\\ =2L[u_1]-3L[u_2]=0.$$

Таким образом, $\hat{u}$ есть решение уравнения (3).

§ 16. Вывод уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородный стержень[1]) постоянного поперечного сечения S и длины l, теплоизолированный с боков,

[1]) Вообще, под стержнем в механике понимается тело с одним превалирующим линейным размером. Например, ракету можно рассматривать как стержень с переменным сечением.

ось которого примем за ось Ox (рис. 235). Обозначим через $u = u(x, t)$ $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t < +\infty)$ температуру стержня в сечении с абсциссой x в момент времени t [1]).

Пусть $\rho = \text{const}$ — плотность стержня, $c = \text{const}$ — его удельная теплоемкость, $k = \text{const}$ — коэффициент теплопроводности, $\Phi(x, t)$ — интенсивность теплового источника, находящегося в сечении x для момента времени t, отнесенная к единице массы и единице времени [2]) (например, аппаратуру, работающую в космическом корабле, можно рассматривать как источник тепла). Согласно закону Фурье количество тепла, протекающего в направлении оси Ox за бесконечно малый промежуток времени dt через сечение S с абсциссой x, равно

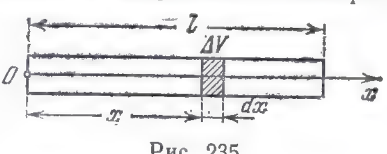


Рис. 235

$$dQ_x = -k \frac{\partial u}{\partial x} S\, dt, \tag{1}$$

где k — коэффициент теплопроводности $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.$ представляет здесь величину градиента температуры $\left.u\right)$. В формуле (1) стоит знак минус, так как при $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, т. е. при возрастании температуры u вместе с x, поток тепла направлен в обратную сторону, и наоборот.

Составим тепловой баланс для элемента стержня ΔV, заключенного между двумя бесконечно близкими сечениями I и II, соответственно, с абсциссами x и $x + dx$. Положим для определенности, что температура стержня u возрастает в направлении оси Ox. Тогда через сечение I тепло выходит (—), а через сечение II — входит (+). Пусть dQ есть количество тепла, накопленное нашим элементом ΔV за промежуток времени dt.

Тогда учитывая, что количество тепла, созданное за время dt источниками тепла, сосредоточенными в элементе ΔV, равно

$$\Phi(x, t) \cdot \rho S\, dx \cdot dt \tag{2}$$

---

[1]) Предполагается, что во всех точках любого поперечного сечения стержня температура одна и та же.

[2]) То есть количество тепла, создаваемое этим источником тепла за единицу времени и приходящееся на единицу массы.

и, используя формулу (1), будем иметь

$$dQ = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \cdot S\,dt + k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} \cdot S\,dt + \rho S\Phi(x,\ t)\,dx\,dt. \quad (3)$$

Применяя формулу (гл. XII, § 5)

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx \quad (4)$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x dx. \quad (5)$$

Поэтому формула (3) принимает вид

$$dQ = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S\,dx\ dt + \rho S\Phi(x,\ t)\,dx\,dt. \quad (6)$$

С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial t}$ есть скорость изменения температуры элемента ΔV, и поэтому $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}dt$ представляет собой изменение температуры его. Так как масса элемента ΔV равна $\rho S\,dx$, то накопленное при этом количество тепла составляет

$$dQ = c\rho\,S\,dx\frac{\partial u}{\partial t}\,dt. \quad (7)$$

Приравнивая выражения (7) и (6), после сокращения на общий множитель $S\,dx\,dt$ получим

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\Phi(x,\ t) \quad (8)$$

или, вводя традиционное обозначение

$$\frac{k}{c\rho} = a^2, \quad (9)$$

окончательно будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c}\Phi(x,\ t). \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение (10), описывающее распределение температуры u в стержне, носит название *уравнения теплопроводности* (*уравнение Фурье*).

Если источники тепла отсутствуют, то уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Аналогичное уравнение справедливо также для температуры тела.

Уравнение теплопроводности находит применение в физике, химии, астрономии, строительном деле и др.

§ 17. Задача о распределении температуры в ограниченном стержне

Согласно § 16 температура $u=u(x, t)$ однородного стержня (рис. 236) в сечении x в момент времени t в отсутствие источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<l). \tag{1}$$

Будем предполагать, что задано начальное условие

$$u(x, 0)=f(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{2}$$

Предположим также, что концы стержня $x=0$ и $x=l$ постоянно имеют температуру, равную температуре внешней среды, которую

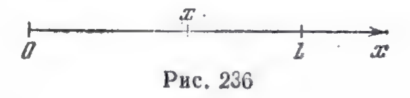


Рис. 236

условно будем считать равной нулю. Таким образом, имеем простейшие краевые условия

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 \tag{3}$$

при любом $t\geqslant 0$.

При данных условиях требуется найти распределение температуры $u=u(x, t)$ в стержне для последующих моментов времени $t\geqslant 0$.

Для уравнения (1) сначала будем искать ненулевые решения специального вида:

$$u=X(x)\,T(t), \tag{4}$$

где $X(x)$ есть функция только переменной x, а $T(t)$ — функция только переменной t. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t}=XT', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T,$$

то, подставляя эти выражения в уравнение (1), получим

$$XT'\equiv a^2X''T.$$

Отсюда, разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{X''}{X}\equiv\frac{T'}{a^2T}. \tag{5}$$

Левая часть тождества (5) зависит только от x, а правая — только от t. Так как x и t — независимые переменные, то это возможно лишь тогда, когда обе части тождества (5) равны некоторой постоянной величине. Обозначая эту постоянную для удобства дальней-

ших выкладок через $-\lambda^2$ [1]), получим

$$\frac{X''}{X}=-\lambda^2, \quad \frac{T'}{a^2T}=-\lambda^2. \tag{6}$$

Отсюда будем иметь два уравнения

$$X''+\lambda^2X=0, \quad T'+a^2\lambda^2T=0. \tag{7}$$

Первое из уравнений (7) есть линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами; корни его характеристического уравнения $k^2+\lambda^2=0$ есть $k_{1,2}=\pm\lambda i$. Согласно известным формулам (см. § 12) его общее решение имеет вид

$$X(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x, \tag{8}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Второе уравнение (3) легко решается методом разделения переменных, а именно, находим

$$T(t)=Ce^{-a^2\lambda^2t}, \tag{9}$$

где C — произвольная постоянная.

Перемножая функции (8) и (9), будем иметь

$$u=e^{-a^2\lambda^2t}(A\sin\lambda x+B\cos\lambda x), \tag{10}$$

причем здесь принято $C=1$, что равносильно замене AC на A и BC на B.

Функции (10), при любом выборе постоянных A, B и λ, удовлетворяют уравнению теплопроводности. Потребуем, чтобы они удовлетворяли также краевым условиям (3). Полагая $x=0$, получим $0=e^{-a^2\lambda^2t}B$; отсюда $B=0$ и, следовательно,

$$u=Ae^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda x. \tag{10'}$$

Полагая теперь $x=l$, в силу условия (3) будем иметь

$$0=Ae^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda l. \tag{11}$$

Но $A\neq 0$, так как в противном случае мы бы имели нулевое решение $u\equiv 0$. Поэтому

$$\sin\lambda l=0 \tag{12}$$

и

$$\lambda l=n\pi \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{13}$$

Отсюда

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l} \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{14}$$

Числа λ_n называются *характеристическими числами* задачи, а совокупность их — *спектром задачи*. Каждому характеристическому числу λ_n соответствует частное решение уравнения теплопроводности:

$$u_n=A_ne^{-b^2n^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

где для краткости положено $b=a\pi/l$.

---

[1]) Можно непосредственно убедиться, что при другом выборе знака этой постоянной мы не получим нужных решений.

Заметим, что в качестве n достаточно брать лишь целые положительные числа ($n=1, 2, \ldots$), так как при $n=0$ имеем $u \equiv 0$, что противопоказано, а при $n < 0$ получаем решения той же природы, как при соответствующем $n' = -n > 0$.

Итак, формула (15) дает полный набор линейно независимых частных решений вида (4) уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющих краевым условиям (3). Физически функции u_n представляют собой температурные волны, графиками которых являются затухающие при $t \to \infty$ синусоиды (рис. 237, *а*, *б*).

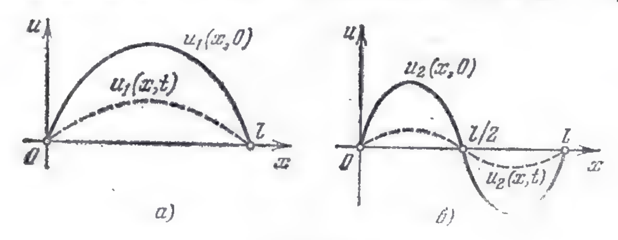


Рис. 237

Осталось обеспечить начальное условие (2). Так как уравнение (1) линейное и однородное, то можно применить принцип наложения решений (§ 15). Отсюда будем иметь

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{16}$$

причем если ряд (16) сходится, то при известных условиях функция (16) является решением уравнения (1). Полагая $t=0$ в формуле (16), в силу начального условия (2) будем иметь

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{17}$$

Ряд (17) представляет собой разложение на отрезке $[0, l]$ функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Для коэффициентов разложения справедливы формулы (см. гл. XXI, § 19)

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

Таким образом, решение задачи дается рядом (16), коэффициенты которого определяются формулой (18). Для обычной инженерной практики достаточно брать несколько членов этого ряда.

Заметим, что полученное решение носит формальный характер, так как не была исследована сходимость ряда (16). Однако можно показать, что если функция $f(x)$ — достаточно гладкая на отрезке $[0, l]$, то ряд (16) сходится и сумма его $u(x, t)$

удовлетворяет как дифференциальному уравнению (1), так и начальному условию (2), а также краевым условиям (3), т. е. $u(x, t)$ есть решение нашей задачи в обычном смысле.

Примененный метод решения задачи обычно называют *методом Фурье* (или методом разделения переменных).

Упражнения

1. Показать, что функция $y = Ce^{-x^2}$, где C — произвольная постоянная величина, является решением уравнения $y' + 2xy = 0$.

2. Показать, что функция $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные величины, является решением уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3. Найти интегральную кривую уравнения $xy' = 2y$, проходящую через точку $M_0(2, 3)$.

4. Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

а) $x\,dx + y\,dy = 0$; б) $y\,dx + x\,dy = 0$; в) $dx - x\,dy = 0$; г) $y' = 2 + y$; д) $y' = e^{x+y}$.

5. Решить однородные дифференциальные уравнения:

а) $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$; б) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

6. Найти интегральную кривую уравнения $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, проходящую через точку (1, 0).

7. Решить линейные дифференциальные уравнения:

а) $xy' = x^3 + y$; б) $(x + y^2)\,y' = 1$.

8. Найти решение уравнения $y' \cos x + y \sin x = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$ при $x = 0$.

9. Найти кривую, в каждой точке которой касательная перпендикулярна полярному радиусу точки касания.

10. Найти кривую, проходящую через точку $A(2, 1)$ и имеющую постоянную подкасательную (т. е. проекцию на ось Ox отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с осью Ox), равную 4.

11. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна имеющемуся наличному количеству его. Найти закон распада радия, если начальное количество радия составляет Q_0 и известно, что через 1600 лет (период полураспада) останется лишь половина этого количества.

12. Химическая реакция, переводящая вещество A в вещество B, протекает так, что в каждый момент времени скорость убывания количества вещества A пропорциональна произведению наличных количеств вещества A и B.

В начальный момент в реторте содержалось 800 г вещества A и 200 г вещества B; через 2 часа вещества A осталось 400 г. Какое количество вещества A будет в реторте через 4 часа?

13. Методом Эйлера найти $y(2)$, если $y' = x - y$, $y(1) = 0{,}370$ $(h = 0{,}2)$.

Проинтегрировать уравнение второго порядка:

14. $y'' = \sin x$. **15.** $y'' = -y$. **16.** $2yy'' = 1 + y'^2$.

17. Найти интегральную кривую уравнения $y'' = x$, проходящую через точку $M_0(0, 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y = \frac{x}{2} + 1$.

18. С помощью степенных рядов проинтегрировать уравнения:

а) $y' = y + \frac{x^2}{4}$, $y(0) = 1$; б) $y'' = xy$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Проинтегрировать линейные уравнения с постоянными коэффициентами:

19. $y'' + y' - 2y = 0$. 20. $y'' + 2y' + 2y = 0$. 21. $y'' + y' + y = 0$.
22. $y'' = y' - 0{,}25y$. 23. $y'' + y = 0$, если $y = 2$ и $y' = -1$ при $x = 0$.
24. $y'' - y = e^{2x}$. 25. $y'' + 4y = \sin x$. 26. $y'' - 5y' + 6y = x^2$.
27. $y'' - 2y' + 2y = 2x$, если $y = 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$.
28. На точку массы m действует притягивающая упругая сила, пропорциональная удалению этой точки от положения равновесия, и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости точки. Найти закон движения точки, предполагая, что сопротивление среды мало по сравнению с упругой силой.

ГЛАВА XXIII

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть K — некоторая гладкая (или кусочно гладкая [1])) плоская кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

где t — параметр, а

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt|$$

— ее дифференциал дуги. Здесь, если $\alpha \leqslant \beta$, то $dt > 0$ и $ds = +\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$; если же $\alpha \geqslant \beta$, то $dt < 0$ и $ds = -\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$. Если $f(x, y)$ — функция, непрерывная на кривой K, то под ее *криволинейным интегралом первого рода*, взятым по кривой K, понимается интеграл

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt|. \qquad (1)$$

Если кривая K задана уравнением

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

то, рассматривая x как параметр, получим

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Допустим, что кривая K — материальная, т. е. имеет массу. Пусть Δs — некоторая дуга кривой K, содержащая точку M, а Δm — масса этой дуги. Тогда отношение $\Delta m/\Delta s$ носит название *средней плотности* дуги Δs, а

$$\mu(M) = \lim_{\Delta s \to M} \frac{\Delta m}{\Delta s},$$

[1]) То есть производные ее координат, возможно, допускают конечное число точек разрыва первого рода.

т. е. предел средней плотности дуги при условии, что дуга Δs стягивается в точку M, называется *линейной плотностью* дуги в точке M.

Если $\mu = f(x, y)$ рассматривать как линейную плотность дуги в текущей ее точке $M(x, y)$, то

$$dm = \mu\, ds$$

есть масса бесконечно малой дуги ds (*элементарная масса*) и интеграл

$$m = \int_K \mu\, ds \tag{2}$$

представляет собой массу линии (ф и з и ч е с к и й с м ы с л к р и в о л и н е й н о г о и н т е г р а л а п е р в о г о р о д а).

Криволинейный интеграл первого рода обладает следующими очевидными свойствами.

1) При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего значения (рис. 238), т. е.

$$\int_{K+} = \int_{K-},$$

где K^+ — кривая K, пробегаемая в заданном направлении (например, при возрастании параметра t), а K^- — кривая

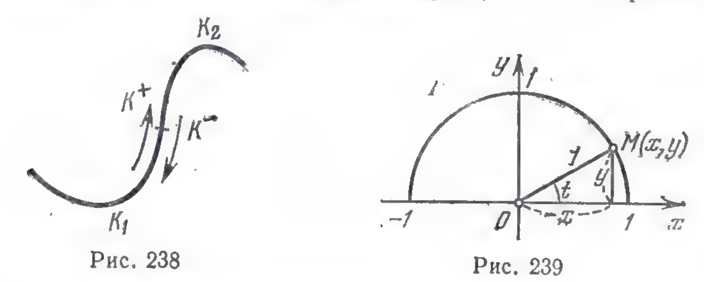


Рис. 238

Рис. 239

K, пробегаемая в противоположном направлении (соответственно при убывании t).

2) Если кривая интегрирования K с помощью некоторой точки разбита на части: $K = K_1 \cup K_2$ (рис. 238), то

$$\int_{K_1 \cup K_2} = \int_{K_1} + \int_{K_2}.$$

П р и м е р. Найти массу полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$ (Г) (рис. 239), если линейная плотность ее в текущей точке $M(x, y)$ пропорциональна ординате y,

Беря в качестве параметра t полярный угол (рис. 239), получим параметрические уравнения полуокружности

$$x=\cos t, \quad y=\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant \pi). \qquad (3)$$

Элементарная масса

$$dm=\mu\, ds=ky\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \qquad (4)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Так как

$$x'=-\sin t, \quad y'=\cos t \quad \text{и} \quad ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=dt,$$

то из (4) имеем

$$dm=k\sin t\,dt.$$

Отсюда масса линии Г будет равна

$$m=k\int_0^{\pi}\sin t\,dx=k(-\cos t)\Big|_0^{\pi}=2k.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$, взятый по кусочно гладкой пространственной кривой K:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (t\in[\alpha, \beta]):$$

$$\int_K f(x, y, z)\,ds=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,|dt|,$$

где

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,|dt|$$

— дифференциал дуги пространственной кривой K.

§ 2. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad (t\in[\alpha, \beta])$$

— гладкая (или кусочно гладкая) кривая K с выбранным направлением (такую линию, для краткости, будем называть *путем*) и $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — пара функций, непрерывных на кривой K. Учитывая, что дифференциалы текущих координат x и y кривой K имеют вид

$$dx=x'(t)\,dt, \quad dy=y'(t)\,dt, \qquad (1)$$

под *криволинейным интегралом второго рода* от пары

функций X и Y, взятым по кривой K, понимается интеграл

$$\int_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta [X(x(t), y(t))\,x'(t) + Y(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt \qquad (2)$$

(по традиции для выражения, стоящего слева, скобки не пишутся и предполагается, что интеграл $\int_K$ относится ко всей сумме).

Если путь K задается уравнением $y = y(x)$ $(x \in [a, b])$, то формула (2) принимает вид

$$\int_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))\,y'(x)]\,dx. \qquad (3)$$

Аналогично, если K задается уравнением $x = x(y)$ $(y \in [A, B])$, то

$$\int_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int_A^B [X(x(y), y)\,x'(y) + Y(x(y), y)]\,dy. \qquad (4)$$

Криволинейный интеграл второго рода обладает следующими свойствами.

1) При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на обратный, т. е.

$$\int_{K^-} = -\int_{K^+}. \qquad (5)$$

Действительно, изменение направления пути интегрирования равносильно перестановке пределов интегрирования α и β в определенном интеграле (2); а это влечет изменение знака определенного интеграла (гл. XIV, § 5).

2) Если путь интегрирования K состоит из двух частей $K = K_1 \cup K_2$, то

$$\int_{K_1 \cup K_2} = \int_{K_1} + \int_{K_2}. \qquad (6)$$

Пример 1. Найти значения интеграла

$$I=\int\limits_K y\,dx-x\,dy$$

вдоль указанных путей: 1) OA — прямая; 2) OmA — парабола с вершиной O и осью Oy; 3) OBA — ломаная и 4) OCA — ломаная (рис. 240).

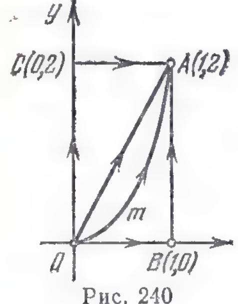


Рис. 240

Решение. 1) Уравнение прямой OA есть $y=2x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. Отсюда $dy=2\,dx$ и, следовательно,

$$I_1=\int\limits_0^1 (2x\,dx-x\cdot 2\,dx)=0.$$

2) Уравнение параболы OmB имеет вид $y=kx^2$. Так как парабола проходит через точку $A\,(1,\ 2)$, то $2=k\cdot 1^2$, и, значит, $k=2$, т. е. $y=2x^2$. Отсюда $dy=$ $=4x\,dx$ и

$$I_2=\int\limits_0^1 (2x^2\,dx-x\cdot 4x\,dx)=-\int\limits_0^1 2x^2\,dx=-\frac{2}{3}\,x^3\Big|_0^1=-\frac{2}{3}.$$

3) На основании свойства 2 имеем

$$I_3=\int\limits_{OB} (y\,dx-x\,dy)+\int\limits_{BA} (y\,dx-x\,dy). \qquad (7)$$

Так как уравнение OB есть $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, то $y'(x)=0$. Далее, уравнение BA записывается так: $x=1$ $(0\leqslant y\leqslant 2)$; поэтому $x'(y)=0$. Из формулы (7) получаем

$$I_3=\int\limits_0^1 (0-x\cdot 0)\,dx+\int\limits_0^2 (y\cdot 0-1)\,dy=-2.$$

4) Аналогично,

$$I_4=\int\limits_{OC} (y\,dx-x\,dy)+\int\limits_{CA} (y\,dx-x\,dy)=$$

$$=\int\limits_0^2 (y\cdot 0-0)\,dy+\int\limits_0^1 (2-x\cdot 0)\,dx=2.$$

Заметим, что здесь интеграл I при фиксированных концах пути интегрирования K зависит от вида этого пути.

Пример 2. Найти

$$I=\int\limits_K y\,dx+x\,dy$$

вдоль линий K, указанных в примере 1.

Решение. Воспользовавшись приведенными выше уравнениями линии K, последовательно имеем

$$I_1=\int\limits_{OA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^1(2x\,dx+x\cdot 2\,dx)=4\int\limits_0^1 x\,dx=2x^2\Big|_0^1=2,$$

$$I_2=\int\limits_{OmA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^1(2x^2\,dx+x\cdot 4x\,dx)=6\int\limits_0^1 x^2\,dx=2x^3\Big|_0^1=2,$$

$$I_3=\int\limits_{OB}(y\,dx+x\,dy)+\int\limits_{BA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^1(0+x\cdot 0)\,dx+\int\limits_0^2(y\cdot 0+1)\,dy=2,$$

$$I_4=\int\limits_{OC}(y\,dx+x\,dy)+\int\limits_{CA}(y\,dx+x\,dy)=$$

$$=\int\limits_0^2(y\cdot 0+0)\,dy+\int\limits_0^1(2+x\cdot 0)\,dx=2.$$

Таким образом, здесь интеграл I имеет одно и то же значение для различных путей, соединяющих точки O и A. Принципиальное различие примеров 1 и 2 будет разъяснено в § 4.

Если

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t\in[\alpha,\ \beta])$$

есть кусочно гладкая пространственная кривая K и $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ — тройка функций, непрерывных на кривой K, то под соответствующим криволинейным интегралом второго рода понимается интеграл

$$\int\limits_K X(x, y, z)\,dx+Y(x, y, z)\,dy+Z(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta[X(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)+Y(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)+$$

$$+Z(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

§ 3. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Пусть $\boldsymbol{F}=\{X(x, y), Y(x, y)\}$ — непрерывно меняющаяся переменная сила и

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (t\in[\alpha,\ \beta])$$

— путь K, пробегаемый точкой приложения ее (рис. 241); обозначим через $\boldsymbol{ds}=\overrightarrow{MM'}$ бесконечно малый вектор пе-

ремещения из текущей точки $M(x, y)$ кривой K в бесконечно близкую точку $M'(x+dx, y+dy)$ (мы здесь пренебрегаем бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с $\mathbf{ds}$). Имеем $\mathbf{ds}=\{dx, dy\}$. Так как на бесконечно

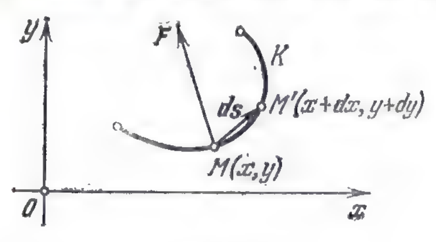


Рис. 241

малом пути $\mathbf{ds}$ непрерывную силу $\mathbf{F}$ можно считать постоянной, то элементарная работа силы (см. гл. XVIII, §§ 12 и 13) равна

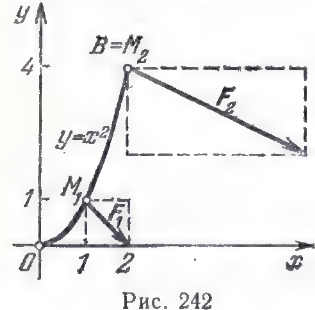


Рис. 242

$$dA=\mathbf{F}\,\mathbf{ds}=X\,dx+Y\,dy. \quad (1)$$

Интегрируя выражение (1) вдоль кривой K, получим **работу силы**

$$A=\int_K X\,dx+Y\,dy. \quad (2)$$

Выражение (2), очевидно, есть соответствующий криволинейный интеграл второго рода.

Итак, *криволинейный интеграл второго рода представляет собой работу переменной силы вдоль пути интегрирования, проекциями которой на координатные оси являются соответствующие коэффициенты при дифференциалах переменных.*

Пример. Найти работу A переменной силы $\mathbf{F}=\{y, -x\}$, точка приложения которой описывает параболу OB (рис. 242):

$$y=x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 2). \quad (3)$$

Согласно формуле (2) имеем

$$A=\int_{OB} X\,dx+Y\,dy=\int_{OB} y\,dx-x\,dy.$$

Из уравнения (3) получаем $dy=2x\,dx$, поэтому

$$A=\int_0^2 x^2\,dx-x\cdot 2x\,dx=-\int_0^2 x^2\,dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=-2\frac{2}{3}\text{ ед.}$$

Аналогично, работа пространственной силы

$$\boldsymbol{F}=\{X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)\}$$

вдоль пути K: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ выражается криволинейным интегралом второго рода

$$A=\int_K X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

§ 4. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от вида пути интегрирования

Пусть $X=X(x, y)$, $Y=Y(x, y)$ — непрерывные функции в области G (рис. 243). Рассмотрим две произвольные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ области и всевозможные пути $M_1\alpha M_2$, $M_1\beta M_2$, $M_1\gamma M_2$, ..., соединяющие эти точки (M_1 — начало пути, M_2 — конец пути) и не выходящие за пределы области G. Может случиться, что

$$\int_{M_1\alpha M_2} X\,dx+Y\,dy=\int_{M_1\beta M_2} X\,dx+Y\,dy=$$
$$=\int_{M_1\gamma M_2} X\,dx+Y\,dy=\ldots \qquad (1)$$

В таком случае говорят, что криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int_{\overset{\frown}{M_1M_2}} X\,dx+Y\,dy \qquad (2)$$

не зависит от вида пути интегрирования в данной области G.

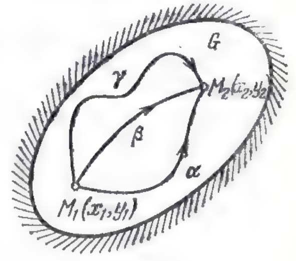


Рис. 243

Если выполняются условия (1), то для интеграла (2) нет необходимости указывать путь интегрирования, а достаточно отметить лишь его начальную точку $M_1(x_1, y_1)$ и его конечную точку $M_2(x_2, y_2)$ пути. Поэтому здесь употребляется обозначение

$$I=\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} X\,dx+Y\,dy. \qquad (3)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Если в области G подынтегральное выражение $X\,dx+Y\,dy$ является полным дифференциалом*[1]) *некоторой функции $U=U(x, y)$, т. е.*

$$dU=X\,dx+Y\,dy \quad \textit{при} \quad (x, y)\in G, \tag{4}$$

то криволинейный интеграл (2) *не зависит от пути интегрирования в области G.*

Доказательство. Пусть

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \quad (t\in[t_1, t_2]) \tag{5}$$

— произвольный путь K в области G, соединяющий точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, причем

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t_1)=x_1, \quad \psi(t_1)=y_1; \\ \varphi(t_2)=x_2, \quad \psi(t_2)=y_2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из формулы (4) имеем

$$X\,dx+Y\,dy=dU[\varphi(t), \psi(t)]. \tag{7}$$

Отсюда получаем

$$I=\int_{t_1}^{t_2} dU[\varphi(t), \quad \psi(t)]=U[\varphi(t), \psi(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}=$$
$$=U[\varphi(t_2), \psi(t_2)]-U[\varphi(t_1), \psi(t_1)]. \tag{8}$$

Далее, используя соотношения (6), будем иметь

$$I=U(x_2, y_2)-U(x_1, y_1)=U(M_2)-U(M_1). \tag{9}$$

Таким образом, значение интеграла I одно и то же при любом выборе функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и, следовательно, интеграл I не зависит от вида пути, соединяющего точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Следствие 1. *Если выполнено соотношение* (4), *то в силу* (9) *имеем*

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} X\,dx+Y\,dy=U(x_2, y_2)-U(x_1, y_1) \tag{10}$$

(*обобщенная формула Ньютона—Лейбница*).

Следствие 2. *Если подынтегральное выражение $X\,dx+Y\,dy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования K замкнутый, то*

$$\oint_K X\,dx+Y\,dy=0$$

---

[1]) Признак полного дифференциала см. гл. XX, § 9.

(кружок при интеграле обозначает интегрирование вдоль замкнутого пути).

Пример. Найти

$$I=\int\limits_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)} y\,dx+x\,dy.$$

Так как $y\,dx+x\,dy=d\,(xy)$, то, независимо от вида пути, соединяющего точки $M_1\,(1,\ 2)$ и $M_2\,(3,\ 4)$, имеем

$$I=\int\limits_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)} d\,(xy)=xy\Big|_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)}=3\cdot 4-1\cdot 2=10.$$

§ 5. Работа потенциальной силы

Теорема предыдущего параграфа имеет физическое содержание. Пусть в области G определено силовое поле

$$\boldsymbol{F}=\{X\,(x,\ y),\quad Y\,(x,\ y)\}.$$

Примером силового поля может служить поле силы тяжести у поверхности Земли, где на любую материальную точку массы m действует сила, численно равная mg (g — ускорение силы тяжести). Более общим примером силового поля является гравитационное поле, создаваемое массой M. Здесь на материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии r от притягивающего центра, согласно закону Ньютона действует сила, численно равная $k\frac{mM}{r^2}$ (k — постоянная тяготения) и направленная к притягивающему центру. Другим примером силового поля служит электрическое поле Кулона.

Если существует функция $U=U\,(x,\ y)$ такая, что

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},$$

то говорят, что *поле потенциальное* (иначе, $\boldsymbol{F}$ — потенциальная сила), а функцию U называют *потенциалом поля*.

В этом случае, очевидно,

$$X\,dx+Y\,dy=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy=dU.$$

Отсюда для работы A потенциальной силы $\boldsymbol{F}$ вдоль пути, соединяющего точки $M_1\,(x_1,\ y_1)$ и $M_2\,(x_2,\ y_2)$, имеем

$$A=\int\limits_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} X\,dx+Y\,dy=\int\limits_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} dU=U\,(x_2,\ y_2)-U\,(x_1,\ y_1),$$

т. е. *работа потенциальной силы не зависит от вида пути и равна разности потенциалов силы для конечной и начальной точек пути.*

В частности, если путь замкнут, то работа $A=0$.

Пример. Найти работу A силы тяжести при перемещении в вертикальной плоскости Oxy (вблизи поверхности Земли) точки массы m из положения $M_1(x_1, y_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 244).

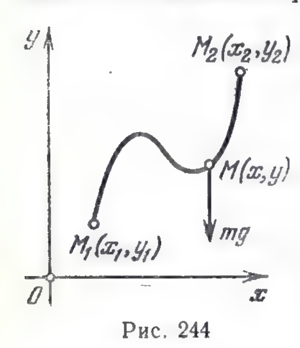


Рис. 244

Если ось Ox горизонтальна, а ось Oy вертикальна, то проекции силы тяжести, действующей на материальную точку массы m, равны $X=0$, $Y=-mg$. Имеем

$$X\,dx+Y\,dy=-mg\,dy=d\,(-mgy).$$

Поэтому за потенциал поля силы тяжести можно принять

$$U=-mgy.$$

Отсюда работа силы тяжести, независимо от пути $\widehat{M_1M_2}$, будет равна

$$A=-mgy\Big|_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)}=-mg\,(y_2-y_1).$$

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла, взятого по пространственной кривой. В частности, если

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=dU\,(x,\ y,\ z),$$

то

$$\int\limits_{(x_1,\ y_1,\ z_1)}^{(x_2,\ y_2,\ z_2)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=U\,(x_2,\ y_2,\ z_2)-U\,(x_1,\ y_1,\ z_1).$$

Упражнения

1. Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

а) $\int\limits_K (x+y)\,ds$, где линия K — отрезок прямой $y=2x-1$ $(-1\leqslant x\leqslant 2)$;

б) $\int\limits_K x\,ds$, где K — дуга параболы $y=x^2/2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$;

в) $\int\limits_K x^2y^2\,ds$, где K — окружность $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

г) $\int\limits_K \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,ds$, где K — дуга кардиоиды $r=a\,(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.

2. Найти площадь «забора», построенного на периферии K квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, высота которого в точке $(x, y) \in K$ равна $z = x^2 + y^2$.

3. Определить массу окружности $x^2 + y^2 = R^2$, если плотность ее в точке (x, y) равна $\rho = y^2/R^2$.

4. Определить координаты центра тяжести $C(x_0, y_0)$ однородной полуокружности K: $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$.

Указание. В механике доказывается, что координаты центра тяжести однородной кривой K выражаются формулами

$$x_0 = \frac{1}{L} \int\limits_K x\, ds, \quad y_0 = \frac{1}{L} \int\limits_K y\, ds,$$

где L — длина дуги кривой.

5. Найти момент инерции I_y дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4/3)$ относительно оси Oy.

Указание. $I_y = \int\limits_K x^2\, ds$.

6. Найти момент инерции I_x арки циклоиды K: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ относительно оси Ox.

Указание. $I_x = \int\limits_K y^2\, ds$.

7. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

а) $\int\limits_K y^2\, dx - x^2\, dy$, где кривая K — дуга параболы $y = 1 - x^2$ от точки $M(-1, 0)$ до точки $N(1, 0)$;

б) $\int\limits_K \frac{dx - dy}{\sqrt{xy}}$, где K — отрезок прямой $x + y = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

в) $\oint\limits_K \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$, где K — окружность $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

8. Вычислить $\oint\limits_K y(y\, dx - x\, dy)$, где K есть контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 1)$ и $B(1, 2)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

9. Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода, не зависящие от пути интегрирования

а) $\int\limits_{(1, 2)}^{(-3, 4)} x\, dx - y\, dy$; в) $\int\limits_{(1, 2)}^{(2, 1)} \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}$ $(y > 0)$;

б) $\int\limits_{(2, 3)}^{(1, 6)} y\, dx - x\, dy$; г) $\int\limits_{(0, 0)}^{(1, 1)} e^{x+y} (dx + dy)$.

10. Найти работу силы с проекциями $X = y$, $Y = -x$ вдоль эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

11. Найти работу силы $F = \{-kx, -ky\}$ при перемещении ее точки приложения из $M_1(a, 0)$ в $M_2(0, b)$.

12. Найти работу силы с проекциями $X=\sin(x+y)$, $Y=0$ вдоль контура треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $M(\pi/2, 0)$, $N(0, \pi/2)$ при обходе его против хода часовой стрелки.

13. Найти работу силы с проекциями $X=x/r^2$, $Y=y/r^2$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, при перемещении точки из положения $M(a, 0)$ в положение $N(0, b)$ $(a>0,\ b>0)$.

Указание. Использовать формулу $x\,dx+y\,dy=r\,dr$.

14. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(4,\,5,\,6)} x\,dx+z\,dy+y\,dz.$$

ГЛАВА XXIV

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Понятие двойного интеграла

В теории определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции было введено понятие интегральной суммы, пределом которой является определенный интеграл (гл. XIV, § 9). На основе задачи об определении объема тела мы придем к понятию двумерной интегральной суммы, предел которой называется *двойным интегралом*.

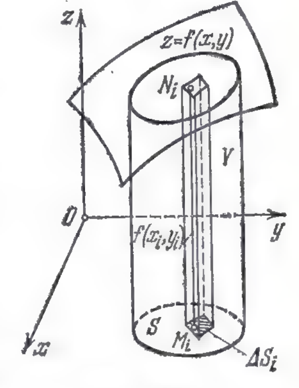


Рис. 245

Задача. Найти объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)$ $(f(x, y) \geqslant 0)$, снизу конечной замкнутой областью S плоскости Oxy и с боков прямой цилиндрической поверхностью, построенной на границе области S и имеющей образующие, перпендикулярные плоскости Oxy (рис. 245).

Тело указанного вида для краткости называется *цилиндроидом*. В частном случае, когда верхнее основание цилиндроида есть плоскость, параллельная нижнему основанию его, то цилиндроид называется *цилиндром*. Примером цилиндра служит круговой цилиндр, рассматриваемый в средней школе. Обобщая рассуждение, обычно применяемое для нахождения объема кругового цилиндра, нетрудно доказать, что объем V цилиндра с площадью основания S и высотой H равен $V=SH$.

Для вычисления объема V данного цилиндроида разобьем основание его S на конечное число элементарных ячеек $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ (вообще говоря, криволинейных). В каждой из этих ячеек ΔS_i выберем точку $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$

($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) и построим прямой цилиндрический столбик с основанием ΔS_i и высотой $M_iN_i = f(x_i,\ y_i)$, равной аппликате поверхности в выбранной точке. Объем такого столбика на основании формулы объема цилиндра, очевидно, равен

$$f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i, \tag{1}$$

где ΔS_i [1]) — площадь соответствующей ячейки. Сумма объемов этих цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное криволинейное тело, причем аппроксимация является, вообще говоря, тем более точной, чем меньше диаметры ячеек ΔS_i. Поэтому объем нашего цилиндроида приближенно выразится суммой

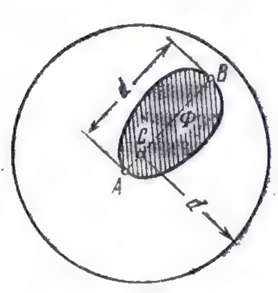


Рис. 246

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i. \tag{2}$$

Формула (2) дает возможность найти объем V с любой степенью точности, если число ячеек ΔS_i достаточно велико и линейные размеры их весьма малы. Обозначим через d_i *диаметр* ячейки ΔS_i, т. е. наибольший линейный размер ее. Точнее говоря, под диаметром d ограниченной замкнутой (т. е. с присоединенной границей) фигуры Ф (дуги, площадки и т. п.) понимается длина наибольшей ее хорды AB, где $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$ (рис. 246) [2]). Из данного определения следует, что фигура Ф, имеющая диаметр d, целиком помещается внутри круга радиуса d, описанного из любой ее точки C как из центра. Поэтому, если $d \to 0$, то фигура Ф «стягивается в точку». Аналогично определяется диаметр пространственного тела.

Пусть

$$d = \max d_i$$

— наибольший из диаметров ячеек $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots,\ \Delta S_n$. Предполагая, что в формуле (2) число ячеек n неограниченно возрастает ($n \to \infty$), причем диаметр наибольшей из них становится сколь угодно малым ($d \to 0$), в пределе полу-

---

[1]) Здесь мы для удобства ячейки и их площади обозначаем одинаковыми буквами. Разница между ними видна из контекста.

[2]) Ячейки ΔS_i можно предполагать замкнутыми.

чим точную формулу для объема цилиндроида

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i\ ^{1)}. \qquad (3)$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (3), называется *двойным интегралом от функции* $f(x,\ y)$, *распространенным на область* S, и обозначается следующим образом:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i=\iint_S f(x,\ y)\,dS. \qquad (4)$$

Поэтому для объема цилиндроида окончательно имеем

$$V=\iint_S f(x,\ y)\,dS. \qquad (5)$$

Обобщая конструкцию, примененную для вычисления объема цилиндроида, приходим к следующим определениям.

Определение 1. *Двумерной интегральной суммой* (2) *от данной функции* $f(x,\ y)$, *распространенной на данную область* S, *называется сумма парных произведений площадей элементарных ячеек* ΔS_i *области* S *на значения* $f(x_i,\ y_i)$ *функции* $f(x,\ y)$ *в выделенных точках этих ячеек* (рис. 247).

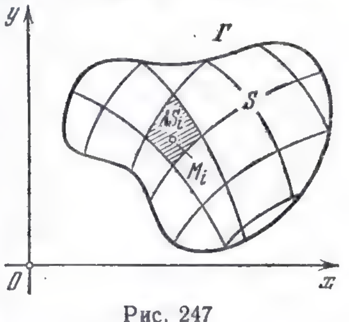


Рис. 247

Определение 2. *Двойным интегралом* (4) *от функции* $f(x,\ y)$, *распространенным на данную область* S, *называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы* (2) *при неограниченном возрастании числа* n *элементарных ячеек* ΔS_i *и стремлении к нулю их наибольшего диаметра* d *при условии, что этот предел существует и не зависит от способа дробления области* S *на элементарные ячейки* ΔS_i *и выбора точек в них.*

В формуле (4) $f(x,\ y)$ называется *подынтегральной функцией*, S — *областью интегрирования*, а dS — *элементом площади*. Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Если область* S *с кусочно гладкой границей* Γ *ограничена и замкнута*[2]), *а функция* $f(x,\ y)$

---

[1]) Точнее говоря, по определению под *объемом* цилиндроида понимается предел (3), если он существует.

[2]) То есть граница Г причисляется к области S (см. гл. XX, § 11).

непрерывна в области S, то двойной интеграл

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i, \qquad (6)$$

существует, т. е. предел соответствующей двумерной интегральной суммы существует и не зависит от способа дробления области S на элементарные ячейки ΔS_i и выбора точек в них.

В дальнейшем мы будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

В формуле (6) нет необходимости указывать, что $n \to \infty$, так как из $d \to 0$, очевидно, следует $n \to \infty$.

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то двойной интеграл (6) представляет собой объем прямого цилиндроида, построенного на области S как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (**геометрический смысл двойного интеграла**).

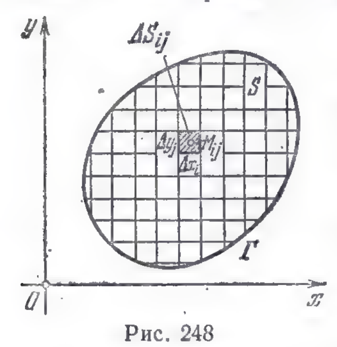


Рис. 248

Так как значение двойного интеграла не зависит от вида элементарных ячеек, то в дальнейшем при решении задач мы будем использовать это обстоятельство, выбирая наиболее подходящие сетки. Весьма часто удобной оказывается **прямоугольная сетка**, образованная пересечением двух систем прямых, параллельных соответственно координатным осям Ox и Oy (рис. 248). В этом случае элементарными ячейками ΔS_{ij} [1]) являются прямоугольники со сторонами, равными Δx_i и Δy_j, за исключением, возможно, ячеек, примыкающих к границе Г. Чтобы подчеркнуть использование прямоугольной сетки, в обозначении интеграла (4) полагают

$$dS = dx\, dy \qquad (7)$$

(двумерный элемент площади в прямоугольных координа-

---

[1]) Здесь мы применяем двойную индексацию ячеек, указывая отдельно номер i вертикальной полосы и номер j горизонтальной полосы, содержащих данную ячейку, подобно тому, как на билете в кино отмечается номер ряда и номер места.

max), причем

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j, \quad (8)$$

где $(x_i, y_j) \in \Delta S_{ij}$ и сумма (8) распространяется на все значения i и j, для которых $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ (можно показать, что непрямоугольные ячейки, примыкающие к кусочно гладкой границе Г, не влияют на значение предела (8)).

В следующих параграфах мы рассмотрим основные способы вычисления двойного интеграла.

§ 2. Двойной интеграл в прямоугольных декартовых координатах

Предположим для определенности, что область интегрирования S представляет собой криволинейную трапецию (рис. 249):

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad (1)$$

где $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — однозначные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Такую область будем называть с т а н д а р т н о й относительно оси Oy. Заметим, что вертикаль, проходящая через точку x оси Ox при $a < x < b$, пересекает границу Г области S только в двух точках $M_1(x, y_1)$ («точка входа») и $M_2(x, y_2)$ («точка выхода»).

Пусть $f(x, y)$ — функция, непрерывная в области S, и

$$I = \iint_S f(x, y)\,dx\,dy \quad (2)$$

— ее двойной интеграл.

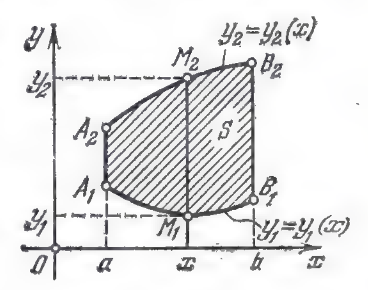


Рис. 249

1) Предположим сначала, что $f(x, y) \geqslant 0$ в области S. Тогда двойной интеграл I представляет собой объем цилиндроида (рис. 250), ограниченного снизу областью S, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью.

Для вычисления объема I применим метод сечений (гл. XV, § 5). А именно, пусть $\sigma(x)$ — площадь сечения цилиндроида плоскостью $M_1M_2M_2'M_1'$, перпендикулярной оси Ox в точке ее $x \in [a, b]$ (рис. 250).

Тогда имеем

$$I = \int_a^b \sigma(x)\,dx. \tag{3}$$

Но $\sigma(x)$ представляет собой площадь криволинейной

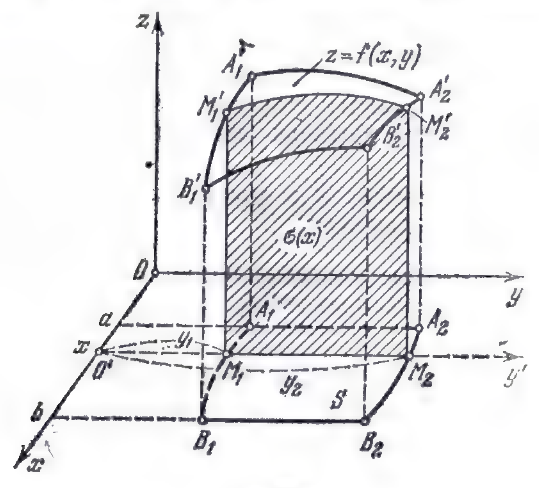


Рис. 250

трапеции, ограниченной снизу отрезком $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ оси $O'y' \parallel Oy$ и сверху кривой $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$.

Поэтому

$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Можно доказать, что при наших условиях $\sigma(x)$ непрерывна при $x \in [a, b]$.

Подставляя выражение (4) в формулу (3), получим окончательно

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{5}$$

Таким образом, двойной интеграл равен соответствующему *повторному интегралу* (5), т. е. вычисление двойного интеграла сводится к двум квадратурам. Заметим, что при вычислении внутреннего интеграла в формуле (5) x рассматривается как постоянная величина.

2) В случае знакопеременной функции $z=f(x, y)$, например, если $f(x, y)\geqslant 0$ при $(x, y)\in S_1$ и $f(x, y)<0$ при $(x, y)\in S_2$ $(S_1\cup S_2=S)$, двойной интеграл (2) равен алгебраической сумме объемов V_1 и V_2 цилиндроидов,

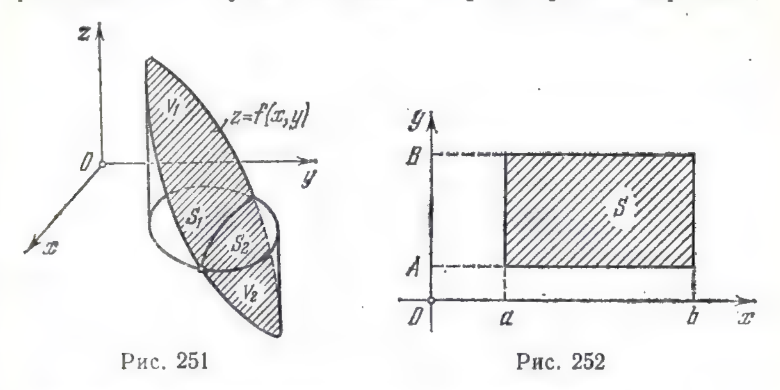


Рис. 251

Рис. 252

построенных соответственно на основаниях S_1 и S_2 (рис. 251), т. е.

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy=V_1-V_2. \tag{6}$$

Можно доказать, что формула (5) справедлива и в этом случае.

Отметим один важный случай: пусть S — прямоугольник $a\leqslant x\leqslant b$, $A\leqslant y\leqslant B$ (рис. 252) и $f(x, y)=X(x)Y(y)$, где $X(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$ и зависящая только от x, и $Y(y)$ — функция, непрерывная на $[A, B]$, зависящая только от y. В силу формулы (5) имеем

$$\iint\limits_S X(x)Y(y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_A^B X(x)Y(y)\,dy=\int\limits_a^b X(x)\,dx\int\limits_A^B Y(y)\,dy. \tag{7}$$

Но внутренний интеграл в формуле (7) есть постоянное число, поэтому его можно вынести за знак внешнего интеграла, и мы получим

$$\iint\limits_S X(x)Y(y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b X(x)\,dx\cdot\int\limits_A^B Y(y)\,dy, \tag{8}$$

т. е. двойной интеграл (8) равен произведению двух однократных интегралов.

Замечание 1. Если область S — стандартная относительно оси Ox, т. е. (рис. 253)

$$A\leqslant y\leqslant B,\quad x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),$$

то по аналогии с формулой (5) получаем

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (9)$$

В частности, если область S есть прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, то имеем

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x, y)\,dy$$

и

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x, y)\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx,$$

т. е. *если пределы интегрирования в повторном интеграле от непрерывной функции конечны и постоянны, то результат интегрирования не зависит от порядка интегрирования.*

Замечание 2. Если область S нестандартная, то ее разбивают (если это возможно) на конечное число областей $S_1, S_2, \ldots, S_p$, стандартных относительно осей

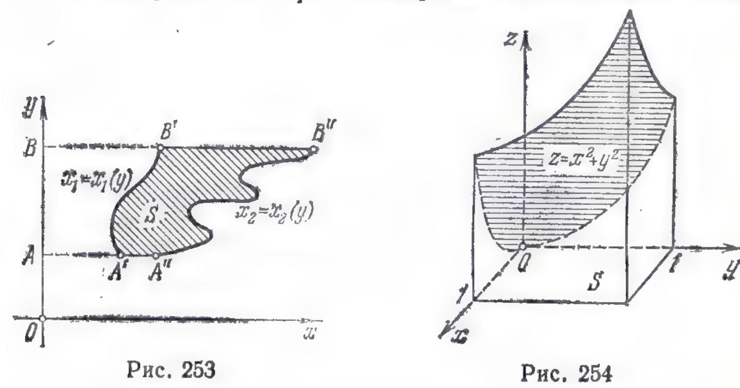


Рис. 253 Рис. 254

координат Ox или Oy, и на основании свойства пределов полагают

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \ldots + \iint\limits_{S_p},$$

а затем применяют соответственно формулы (5) или (9).

Пример 1. Найти

$$I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

где S — квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Расставляя пределы интегрирования, будем иметь

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy=\int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx=$$

$$=\int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Геометрически I представляет собой объем цилиндроида с квадратным нижним основанием, ограниченного сверху параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ (рис. 254).

Пример 2. Вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_S xy^2\,dx\,dy,$$

где S — прямоугольник $0\leqslant x\leqslant 1$, $-2\leqslant y\leqslant 3$.

Расставляя пределы интегрирования и разделяя переменные, будем иметь

$$I=\int_0^1 x\,dx\cdot\int_{-2}^3 y^2\,dy=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2}^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{27+8}{3}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}.$$

Пример 3. Вычислить

$$I=\iint\limits_S x^2y\,dx\,dy, \tag{10}$$

где S — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$ и $B(2, 1)$ (рис. 255).

Область S ограничена прямыми $y=0$, $y=x/2$, $x=2$ и является стандартной как относительно оси Oy, так и оси Ox.

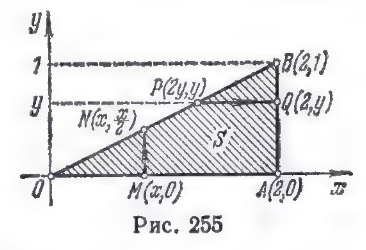


Рис. 255

Для вертикали MN «точка входа» в область S есть $M(x, 0)$, «точка выхода» — $N(x, x/2)$ $(0 < x < 2)$. Таким образом, при фиксированном x переменная y, для точек области S, меняется от 0 до $x/2$. Поэтому, интегрируя в двойном интеграле (10) сначала по y при $x=\text{const}$, а затем по x, согласно формуле (5) будем иметь

$$I=\int_0^2 x^2\,dx\int_0^{x/2} y\,dy=\int_0^2 x^2\,dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=x/2}=\frac{1}{8}\int_0^2 x^4\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{4}{5}. \tag{11}$$

Аналогично, для горизонтали PQ «точка входа» в область есть $P(2y, y)$ и «точка выхода» — $Q(2, y)$ $(0 < y < 1)$. Следовательно, при фиксированном y переменная x для точек области S меняется от $2y$ до 2. Произведя в двойном интеграле (10) интегрирование сначала по x при $y = \text{const}$, а затем по y, на основании формулы (9) получим

$$I = \int_0^1 y\,dy \int_{2y}^{2} x^2\,dx = \int_0^1 y\,dy \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=2y}^{x=2} =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 (y - y^4)\,dy = \frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}. \qquad (12)$$

Мы пришли, как и следовало ожидать, к тому же самому результату, причем второй способ вычисления оказался несколько более сложным.

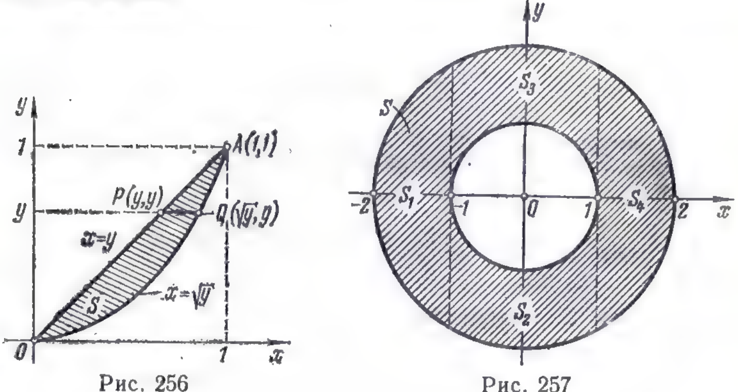


Рис. 256 Рис. 257

Пример 4. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy.$$

Область интегрирования S ограничена кривыми $y = x^2$, $y = x$ и $x = 0$, $x = 1$ (рис. 256). Отсюда, изменяя роли осей координат, получаем

$$x = \sqrt{y} \geqslant 0, \quad x = y \quad \text{и} \quad y = 0, \ y = 1.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

Пример 5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int_S f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (13)$$

если область интегрирования S есть круговое кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=1$ (γ) и $x^2+y^2=4$ (Γ) (рис. 257). Область S не является стандартной. Для расстановки пределов интегрирования в интервале (13) разбиваем область S на четыре стандартные, относительно оси Oy, области S_1, S_2, S_3 и S_4, как указано на рисунке. Используя уравнение окружностей

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}\ (\gamma) \text{ и } y=\pm\sqrt{4-x^2}\ (\Gamma),$$

имеем

$$I=\iint\limits_{S_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{S_2} f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{S_3} f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{S_4} f(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy+\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy+\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy+\int\limits_{1}^{2} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

Аналогичная формула получится, если мы будем расставлять пределы интегрирования в другом порядке.

§ 3. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть в двойном интеграле

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_S f(x, y)\,dS \tag{1}$$

при обычных предположениях мы желаем перейти к полярным координатам r и φ, полагая

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi. \tag{2}$$

Область интегрирования S разобьем на элементарные ячейки ΔS_{ij} с помощью координатных линий $r=r_j$ (окружности) и $\varphi=\varphi_i$ (лучи) (рис. 258). Введем обозначения

$$\Delta r_j=r_{j+1}-r_j, \quad \Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i.$$

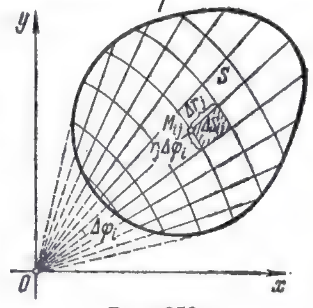


Рис. 258

Так как окружность перпендикулярна (ортогональна) радиусам, то внутренние ячейки ΔS_{ij} с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости относительно их

площади можно рассматривать как прямоугольники с измерениями $r_j \Delta\varphi_i$ и Δr_j; поэтому площадь каждой такой ячейки будет равна

$$\Delta S_{ij} \approx r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j. \qquad (3)$$

Что касается ячеек ΔS_{ij} неправильной формы, примыкающих к границе Г области интегрирования S, то эти ячейки не повлияют на значение двойного интеграла (ср. § 1, формула (8)) и мы их будем игнорировать.

В качестве точки $M_{ij} \in \Delta S_{ij}$ для простоты выберем вершину ячейки ΔS_{ij} с полярными координатами r_j и φ_i. Тогда декартовы координаты точки M_{ij} равны

$$x_{ij} = r_j \cos\varphi_i, \qquad y_{ij} = r_j \sin\varphi_i$$

и, следовательно,

$$f(x_{ij}, y_{ij}) = f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i). \qquad (3')$$

Двойной интеграл (1) представляет собой предел двумерной интегральной суммы, причем можно показать, что на значение этого предела не влияют добавки к слагаемым интегральной суммы, являющиеся бесконечно малыми высшего порядка малости. Поэтому, учитывая формулы (3) и (3′), получаем

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta S_{ij} =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{i,j} f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i) r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j, \qquad (4)$$

где d—максимальный диаметр ячеек ΔS_{ij} и сумма распространена на все ячейки указанного выше вида, целиком содержащиеся в области S. С другой стороны, величины φ_i и r_j суть числа и их можно рассматривать как прямоугольные декартовы координаты некоторых точек плоскости $O\varphi r$. Таким образом, сумма (4) является интегральной суммой для функции

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r,$$

соответствующая прямоугольной сетке с линейными элементами $\Delta\varphi_i$ и Δr_j. Следовательно,

$$\lim_{d \to 0} \sum f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i) r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j =$$

$$= \iint\limits_{S} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr. \qquad (5)$$

Сравнивая формулы (4) и (5), получим окончательно

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr. \qquad (6)$$

Выражение

$$dS = r\,d\varphi\,dr \qquad (7)$$

называется *двумерным элементом площади в полярных координатах* (ср. гл. XV, § 2). Итак, *чтобы в двойном интеграле* (1) *перейти к полярным координатам, достаточно координаты x и y заменить по формулам* (2), *а вместо элемента площади dS подставить выражение* (7).

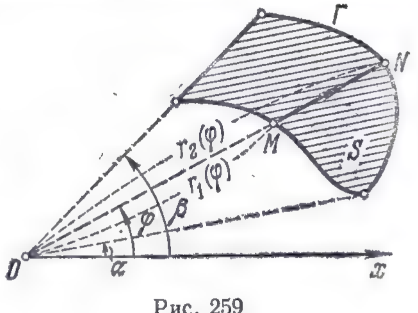


Рис. 259

Для вычисления двойного интеграла (6) его нужно заменить повторным. Пусть область интегрирования S определяется неравенствами

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi),$$

где $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ — однозначные непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$ (рис. 259). Тогда по аналогии с прямоугольными координатами (см. § 2) имеем

$$\iint_S F(r, \varphi)\,d\varphi\,dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi)\,dr, \qquad (8)$$

где

$$F(r, \varphi) = rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Пример 1. Переходя к полярным координатам φ и r, вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

где S — первая четверть круга радиуса $R=1$ с центром в точке $O(0, 0)$ (рис. 260).

Так как $\sqrt{x^2+y^2} = r$, то, применяя формулу (6), получим

$$I = \iint_S \frac{r\,d\varphi\,dr}{r} = \iint_S d\varphi\,dr.$$

Область S определяется неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Поэтому на основании формулы (8) имеем

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. В интеграле

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\, dy \tag{9}$$

перейти к полярным координатам.

Область интегрирования здесь есть треугольник S, ограниченный прямыми $y=0$, $y=x$, $x=1$ (рис. 261).

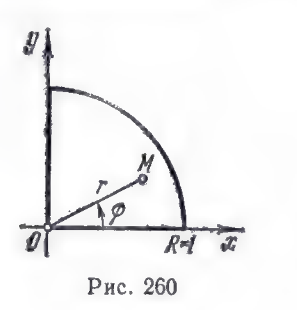


Рис. 260

Рис. 261

В полярных координатах уравнения этих прямых записываются следующим образом: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$, $r \cos\varphi = 1$ и, следовательно, область S определяется неравенствами

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1/\cos\varphi = \sec\varphi.$$

Отсюда на основании формул (6) и (8), учитывая, что $\sqrt{x^2+y^2} = r$, имеем

$$I = \iint\limits_S r \cdot r\, d\varphi\, dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sec\varphi} r^2\, dr.$$

§ 4. Интеграл Эйлера — Пуассона

С помощью полярных координат можно просто вычислить важный для теории вероятностей *интеграл Эйлера— Пуассона*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx. \tag{1}$$

Так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то, очевидно, можно

также записать

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy. \qquad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2) и учитывая, что произведение этих однократных интегралов можно рассматривать как двойной интеграл от произведения подынтегральных функций (см. § 2, формула (8)), будем иметь

$$I^2=\iint_S e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy, \qquad (3)$$

где область S определяется неравенствами

$$0\leqslant x<+\infty, \quad 0\leqslant y<+\infty$$

и, следовательно, представляет собой первый квадрант координатной плоскости Oxy (рис. 262)[1].

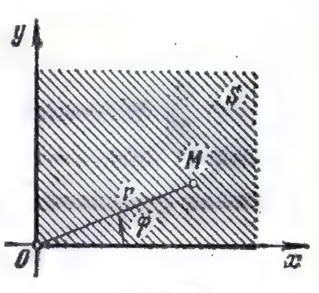


Рис. 262

Переходя в интеграле (3) к полярным координатам, получим

$$I^2=\iint_S e^{-r^2}r\,d\varphi\,dr=\int_{0}^{\pi/2} d\varphi\int_{0}^{+\infty} re^{-r^2}\,dr=$$

$$=\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда, учитывая положительность числа I, находим

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

В силу четности функции $y=e^{-x^2}$ имеем также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},$$

что представляет собой площадь, ограниченную осью Ox и кривой Гаусса $y=e^{-x^2}$ (см. гл. XI, § 8, рис. 120).

---

[1]) Строго говоря, интеграл (3) является несобственным и нуждается в специальном определении. Однако выполняемые формальные операции приводят к правильным результатам.

§ 5. Теорема о среднем

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области S и $m = \min_S f(x, y)$, $M = \max_S f(x, y)$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области S. Для двумерной интегральной суммы этой функции, распространенной на область S, имеем оценки

$$mS \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i \leqslant MS, \tag{1}$$

где $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ — площадь области S. Отсюда, переходя к пределу при $d = \max_i d(\Delta S_i) \to 0$ в неравенствах (1) и учитывая существование двойного интеграла, получим

$$mS \leqslant \iint_S f(x, y)\, dS \leqslant MS. \tag{2}$$

Число

$$\mu = \frac{1}{S} \iint_S f(x, y)\, dS \tag{3}$$

называется *средним значением* функции $f(x, y)$ в области S. Из неравенств (2) вытекает, что $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Формулу (3) можно переписать в следующем виде:

$$\iint_S f(x, y)\, dS = \mu S \tag{4}$$

$(m \leqslant \mu \leqslant M)$. Таким образом, *двойной интеграл равен среднему значению подынтегральной функции, умноженной на площадь области интегрирования.*

Не нужно думать, что формула (4) дает универсальный способ вычисления двойного интеграла. Дело в том, что, как правило, среднее значение функции определяется через двойной интеграл. Поэтому реальный смысл здесь имеет оценка (2).

Пример. Оценить интеграл

$$I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$

где S — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Для функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем

$$m = \min_S f(x, y) = f(0, 0) = 0 \quad \text{и} \quad M = \max_S f(x, y) = f(1, 1) = \sqrt{2}.$$

Так как $S = 1$, то $0 \leqslant I \leqslant \sqrt{2} = 1{,}41$.

Можно принять

$$I \approx \frac{1}{2}(0+1{,}41)=0{,}71.$$

Эта оценка грубая, так как точное значение интеграла есть

$$I=\frac{1}{3}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\approx 0{,}79.$$

Более точное значение интеграла I получится, если область интегрирования S разбить на достаточно мелкие части и к каждой из них применить теорему о среднем.

§ 6. Геометрические приложения двойного интеграла

В § 1 было показано, что прямой цилиндроид, построенный на основании S в координатной плоскости Oxy и ограниченный сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)$, имеет объем, равный

$$V=\iint_S f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти объем V тела, ограниченного поверхностями

$$z=x^2, \quad z=0, \quad x=0,$$
$$y=0, \quad x+y=1.$$

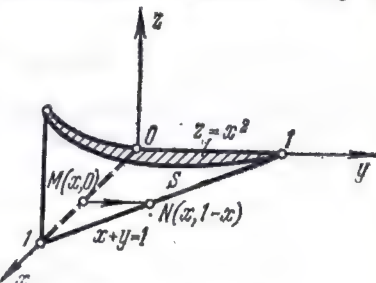


Рис. 263

Искомое тело имеет своим основанием треугольник S на плоскости Oxy, образованный линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, и ограничено сверху параболическим цилиндром $z=x^2$ (рис. 263). Отсюда на основании формулы (1) получим

$$V=\iint_S x^2\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2\,dy=\int_0^1 dx\cdot x^2 y\Big|_{y=0}^{y=1-x}=$$

$$=\int_0^1 x^2(1-x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Если в формуле (1) положить

$$f(x, y)\equiv 1,$$

то получим объем прямого цилиндра с высотой $z=1$, численно равный площади S его основания. Поэтому площадь плоской области S равна

$$S=\iint_S dx\,dy. \qquad (2)$$

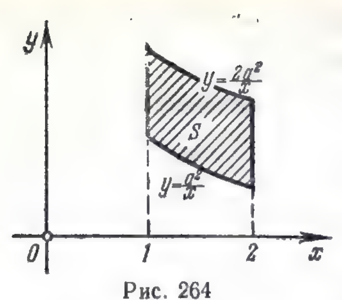


Рис. 264

Формулу (2) можно записать также в виде

$$S=\iint_S dS. \qquad (3)$$

Пример 2. Найти площадь, ограниченную гиперболами $y=a^2/x$, $y=2a^2/x$ $(a>0)$ и прямыми $x=1$, $x=2$ (рис. 264).

На основании формулы (2) получим, что площадь S равна

$$S=\int_1^2 dx \int_{a^2/x}^{2a^2/x} dy=\int_1^2 \left(\frac{2a^2}{x}-\frac{a^2}{x}\right) dx=a^2\int_1^2 \frac{dx}{x}=a^2 \ln x \,\Big|_1^2=a^2 \ln 2 \approx 0{,}7a^2.$$

§ 7. Физические приложения двойного интеграла

Пусть S — материальная пластинка. Если ΔS есть часть пластинки S, содержащая точку M и имеющая массу Δm, то отношение

$$\frac{\Delta m}{\Delta S}$$

называется *средней поверхностной плотностью* куска ΔS, а предел этого отношения, при условии, что диаметр $d(\Delta S)\to 0$, называется *поверхностной плотностью* $\rho(M)$ пластинки S в точке M:

$$\rho(M)=\lim_{d(\Delta S)\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta S}.$$

Очевидно, поверхностная плотность $\rho(M)$ пластинки S есть функция точки M. Понятия средней поверхностной плотности пластинки и поверхностной плотности пластинки в данной точке вполне аналогичны понятиям средней линейной плотности дуги и линейной плотности дуги в точке, введенным в гл. XXIII, § 1.

Положим, что поверхностная плотность пластинки S в текущей точке $M(x, y)$ равна $\rho=\rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ — известная непрерывная функция. Рассмотрим бесконечно малый элемент dS пластинки, содержащий точку M (рис. 265). Так как в пределах этого элемента пластинку можно считать однородной с плотностью ρ, то масса элемента dS (*элементарная масса*) равна

$$dm=\rho\, dS. \qquad (1)$$

Интегрируя выражение (1) по всей пластинке S, находим *массу пластинки*

$$m=\iint_S \rho\, dS. \tag{2}$$

Рассматривая dm как материальную точку, удаленную от осей координат Ox и Oy на расстояния y и x, получим *элементарные статические моменты пластинки*

$$dS_x = y\, dm = y\rho(x, y)\, dS$$

и

$$dS_y = x\, dm = x\rho(x, y)\, dS.$$

Отсюда, интегрируя эти выражения по всей пластинке S, находим *статические моменты пластинки S относительно координатных осей*

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \iint_S y\rho(x, y)\, dS, \\ S_y &= \iint_S x\rho(x, y)\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

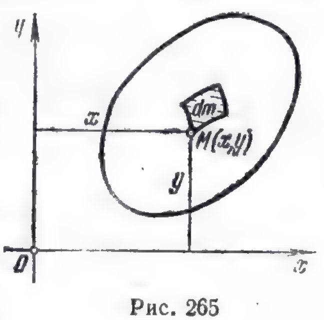


Рис. 265

В механике доказывается, что статический момент пластинки относительно какой-нибудь оси совпадает со статическим моментом точечной массы, равной массе пластинки, сосредоточенной в центре тяжести ее относительно той же оси (*теорема Вариньона*). Отсюда, обозначая через (x_0, y_0) координаты *центра масс* пластинки S, будем иметь

$$S_y = mx_0, \quad S_x = my_0;$$

следовательно,

$$x_0 = \frac{S_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y)\, dS, \quad y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y)\, dS, \tag{4}$$

где m — масса (2) пластинки.

Аналогично, для *элементарных моментов инерции* пластинки S относительно осей координат Ox и Oy получаем выражения

$$dI_x = y^2\, dm = y^2\rho(x, y)\, dS, \quad dI_y = x^2\, dm = x^2\rho(x, y)\, dS.$$

Отсюда после интегрирования по пластинке S будем иметь *моменты инерции пластинки S относительно коор-*

динатных осей

$$I_x=\iint\limits_S y^2\rho(x, y)\,dS, \quad I_y=\iint\limits_S x^2\rho(x, y)\,dS. \qquad (5)$$

Элементарный полярный момент инерции определяется формулой

$$dI_0=r^2\,dm=(x^2+y^2)\,\rho(x, y)\,dS,$$

где $r^2=x^2+y^2$ — квадрат расстояния массы dm от начала координат. Интегрируя последнее выражение по пластинке S, получаем *полярный момент пластинки*

$$I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\rho(x, y)\,dS. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$I_0=I_x+I_y. \qquad (7)$$

Полагая $\rho(x, y)\equiv 1$ в формулах моментов, получим соответствующие моменты инерции геометрической фигуры S. Напомним, что при вычислении в декартовых прямоугольных координатах, как обычно, принимается $dS=dx\,dy$, а в случае полярных координат имеем $dS=r\,d\varphi\,dr$.

Пример 1. Определить координаты центра масс квадратной пластинки S: $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$, поверхностная плотность которой в точке $M(x, y)$ равна $\rho=x+y$.

Пользуясь формулой (2), находим массу пластинки

$$m=\iint\limits_S \rho\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^2 (x+y)\,dy=$$

$$=\int_0^2 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=\int_0^2 (2x+2)\,dx=(x^2+2x)\Big|_{x=0}^{x=2}=8.$$

По формуле (3) определяем статические моменты пластинки S относительно координатных осей

$$S_x=\iint\limits_S y\rho\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^2 (xy+y^2)\,dy=\int_0^2 dx\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=\int_0^2\left(2x+\frac{8}{3}\right)dx=\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=4+\frac{16}{3}=9\frac{1}{3},$$

$$S_y=\iint\limits_S x\rho\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^2 (x^2+xy)\,dy=\int_0^2 dx\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=\int_0^2 (2x^2+2x)\,dx=\left(\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=\frac{16}{3}+4=9\frac{1}{3}.$$

Равенство моментов S_x и S_y можно было предвидеть ввиду симметрии задачи.

На основании формул (4) центр масс пластинки S имеет координаты

$$x_0=\frac{S_y}{m}=\frac{28}{3\cdot 8}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}, \quad y_0=\frac{S_x}{m}=1\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Найти момент инерции I_x круга S: $x^2+y^2\leqslant x$ (рис. 266) относительно оси Ox.

Полагая $\rho=1$, на основании первой формулы (5) имеем

$$I_x=\iint\limits_S y^2\,dS. \qquad (8)$$

Задачу будем решать в полярных координатах. Имеем

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi \text{ и}$$
$$dS=r\,d\varphi\,dr.$$

Уравнение границы Γ области S есть

$$x^2+y^2=x.$$

Рис. 266

Отсюда, переходя к полярным координатам, получим $r^2=r\cos\varphi$. Следовательно, после сокращения на несущественный множитель r имеем

$$r=\cos\varphi,$$

причем, так как $r\geqslant 0$, то $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. Таким образом, при каждом фиксированном $\varphi\in[-\pi/2,\ \pi/2]$ радиус r меняется в пределах $0\leqslant r\leqslant\cos\varphi$. Переходя к полярным координатам в формуле (8), получим

$$I_x=\iint\limits_S r^2\sin^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}r^3\,dr=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi.$$

Как известно, $\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$ и $\sin^2\varphi\cos^2\varphi=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi$, поэтому

$$I_x=\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{32}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi+$$

$$+\frac{1}{32}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{64}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{64}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d(\sin 2\varphi)=$$

$$=\frac{1}{64}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{64}\cdot\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{64}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-0\right)+0=\frac{\pi}{64}.$$

§ 8. Понятие о тройном интеграле

По аналогии с двойным интегралом определяется так называемый *тройной интеграл*. Пусть в декартовом пространстве $Oxyz$ задана конечная замкнутая область V и $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная в V. Разобьем область V на конечное число ячеек $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ и в каждой из них выберем точку

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$



Рис. 267

(рис. 267.) Сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i, \qquad (1)$$

где ΔV_i — объем i-й ячейки, называется *трехмерной интегральной суммой*.

Обозначим через d наибольший из диаметров ячеек ΔV_i [1]). Будем произвольным способом неограниченно измельчать ячейки ΔV_i. Тогда предел интегральной суммы (1) при $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от формы ячеек ΔV_i и выбора точек M_i в них, называется *тройным интегралом от функции* $f(x, y, z)$, *распространенным на область* V, и обозначается следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i. \qquad (2)$$

Доказывается, что если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области интегрирования V с кусочно гладкой границей, то тройной интеграл (2) существует.

Если область V заполнена массой и $f(x, y, z)$ представляет собой непрерывно распределенную объемную плотность в текущей точке $M(x, y, z)$, то $f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$, где $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$, с точностью до бесконечно малой высшего порядка малости относительно максимального объема ячеек ΔV_j $(j = 1, \ldots, n)$, есть масса ячейки ΔV_i. Следовательно, интегральная сумма (1) приближенно равна массе m, заполняющей область V. При

[1]) Понятие диаметра см. в § 1.

$d \to 0$ получаем, что предел суммы S_n будет равен массе m. Отсюда выводим *физический смысл тройного интеграла*: если $f(x, y, z)$ есть непрерывная плотность распределения массы в пространстве $Oxyz$, то тройной интеграл

$$m = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV \tag{3}$$

представляет собой массу, заполняющую область интегрирования V. В частности, если плотность $f(x, y, z) \equiv 1$, то масса области V численно равна ее объему. Поэтому объем области V выражается тройным интегралом

$$V = \iiint\limits_V dV. \tag{4}$$

Если вычисление тройного интеграла (2) ведется в прямоугольных координатах x, y, z, то в качестве ячеек ΔV_{ijk} выбирают прямоугольные параллелепипеды с измерениями Δx_i, Δy_j, Δz_k, грани которых параллельны координатным плоскостям, т. е. полагают

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

В этом случае *элемент объема* dV считают равным

$$dV = dx\,dy\,dz \tag{5}$$

(*элемент объема в прямоугольных координатах*) и тройной интеграл (2) записывают в следующем виде:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

В частности, для объема тела получаем формулу

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \tag{6'}$$

В простейшем случае вычисление тройного интеграла (6) сводится к трем квадратурам. А именно, пусть область интегрирования V стандартна относительно оси Oz (ср. § 2), т. е. ограничена снизу и сверху соответственно однозначными непрерывными поверхностями

$$z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y),$$

причем проекция области V на координатную плоскость Oxy есть плоская область S (рис. 268).

Отсюда следует, что при фиксированных значениях $(x, y) \in S$ соответствующие аппликаты z точек области V

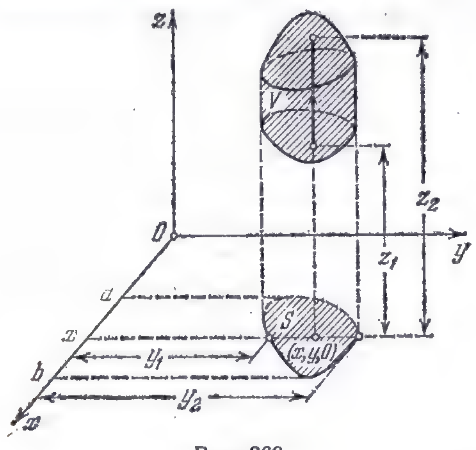


Рис. 268

изменяются в пределах $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$. По аналогии с двойным интегралом (§ 6) будем иметь

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_S dx\, dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (7)$$

Если, кроме того, проекция S стандартна относительно оси Oy и определяется неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — однозначные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, то

$$\iint\limits_S dx\, dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (8)$$

Из формул (7) и (8) получаем окончательно

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (9)$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к трем квадратурам.

Заметим, что если область интегрирования V стандартна относительно всех трех координатных осей Ox, Oy и Oz,

то пределы интегрирования для тройного интеграла (6) можно расставить $3! = 6$ различными способами.

Пример. Вычислить

$$I = \iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz,$$

где V — пирамида $OPQR$, ограниченная следующими плоскостями:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1$$

(рис. 269).

Рис. 269

Проекция области V на координатную плоскость Oxy есть треугольник S, ограниченный прямыми

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

При $(x, y) \in S$ аппликаты точек $(x, y, z) \in V$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$. Поэтому

$$I = \iint\limits_S xy\,dx\,dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz = \iint\limits_S xy\,dx\,dy \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_S xy\,(1 - x - y)^2\,dx\,dy.$$

Расставляя пределы интегрирования для треугольника S, получим

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{1-x} y\,[(1-x)^2 - 2(1-x)\,y + y^2]\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x \left[(1-x)^2 \cdot \frac{y^2}{2} - 2(1-x) \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x\,(1-x)^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{24} \int\limits_0^1 [1 - (1-x)]\,(1-x)^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{24} \left\{ \int\limits_0^1 (1-x)^4\,dx - \int\limits_0^1 (1-x)^5\,dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{24} \left[-\frac{(1-x)^5}{5}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{(1-x)^6}{6}\Big|_{x=0}^{x=1} \right] = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{720}.$$

Число I представляет собой массу пирамиды V, если плотность ее в текущей точке $M(x, y, z)$ равна $\rho = xyz$.

Упражнения

1. Вычислить повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_2^5 \frac{x}{y^2}\,dy$; б) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^1 e^{x-y}\,dy$; в) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sin^2\varphi\,dr$.

2. Нарисовать область интегрирования и вычислить повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \sqrt{x+y}\,dy$; б) $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_y^{y+y^2} xy\,dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\varphi} r\cos\varphi\,dr$.

3. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy$ для следующих областей интегрирования:

а) S — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(1, 2)$;

б) S — трапеция с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, 1)$ и $C(0, 1)$;

в) S — четверть круга $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

г) S — параболический сегмент, ограниченный линиями $y=x^2$, $y=4$;

д) S — круг $x^2+y^2 \leqslant 2x$.

4. Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^x f(x, y)\,dy$; б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^e f(x, y)\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dx$.

5. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

а) $\iint\limits_S x^2y\,dx\,dy$, где S — круговой сектор, ограниченный линиями $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=-x$ $(y \geqslant 0)$;

б) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где S — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, -1)$, $B(2, 1)$;

в) $\iint\limits_S f(x+y)\,dx\,dy$, где S — параболический сегмент, ограниченный линиями $y=x$ и $y=x^2$.

6. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_S (x+y)\,dx\,dy$, где S — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$;

б) $\iint\limits_S xy^2\,dx\,dy$, где S — параболический сегмент, ограниченный линиями $y^2=x$, $x=1$;

в) $\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{(y+1)^2}$, где S — параболический сегмент, ограниченный линиями $y=1-x^2$, $y=0$;

г) $\iint\limits_S \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$, где S — гиперболический сегмент, ограниченный линиями $xy=4$, $x+y=5$.

7. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_S \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где S — круг $x^2+y^2\leqslant\pi^2$;

б) $\iint\limits_S \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где S — треугольник, ограниченный прямыми $y=x$, $y=-x$, $y=1$.

8. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $z=\sqrt{1-y^2}$, $z=0$, $y=x$, $x=0$;

б) $z=2-x-y$, $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$;

в) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $y^2=x$, $x=1$;

г) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=2x$;

д) $z=\frac{c}{a}x$, $z=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(z\geqslant 0)$.

9. Найти моменты инерции однородной круглой пластинки $x^2+y^2\leqslant R^2$ относительно осей Ox и Oy.

10. Определить координаты центра масс однородной пластинки, ограниченными кривыми $ay=x^2$, $y=a$.

11. Вычислить

$$\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz.$$

12. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=y^2$, $z=2y^2$, $xy=1$, $xy=4$, $x=1$, $x=3$.

ГЛАВА XXV

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

§ 1. Случайные события

В естественных науках познание действительности происходит в результате испытаний (экспериментов) или наблюдений, т. е. опыта в широком понимании слова. Под испытанием (наблюдением), в общем смысле, подразумевается наличие определенного комплекса условий. Возможный результат — исход испытания или наблюдения — называется *событием*, независимо от его значимости.

При построении теории события идеализируются, т. е. игнорируются ситуации, несущественные для данного явления.

Пример. При бросании монеты может выпасть герб или решетка (обратная сторона). Таким образом, при однократном испытании возможны два события: A — выпадение герба и B — выпадение решетки.

Однако возможно еще одно событие C — когда монета станет на ребро. Но при организации игры в «орлянку» это обстоятельство несущественно (монета перебрасывается!) и в нашем идеализированном опыте это событие не учитывается.

Определение 1. *Результат испытания, который нельзя заранее прогнозировать, называется случайным событием.*

Иными словами, событие является случайным в данном опыте, если заранее нельзя предсказать, произойдет оно или не произойдет в этом опыте.

Например, случайным событием является выпадение герба при бросании монеты. Конечно, предполагается, что испытание организовано так, что исход его заранее не известен.

Во многих случаях случайное событие есть результат неполной информации о данном явлении. Например, в опыте с бросанием

монеты, если нам были бы известны: сила толчка, форма монеты, закон сопротивления воздуха и другие факторы, определяющие закон движения монеты, то мы смогли бы точно предсказать исход испытания.

Определение 2. *Событие называется достоверным в данном испытании (т. е. при осуществлении определенной совокупности условий), если оно неизбежно происходит при этом испытании.*

Например, получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть событие достоверное, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Определение 3. *Событие называется невозможным в данном испытании, если оно заведомо не происходит в этом испытании.*

Например, если в урне находятся лишь цветные (небелые) шары, то извлечение из этой урны белого шара есть событие невозможное. Отметим, что при других условиях опыта появление белого шара не исключается; таким образом, это событие невозможно лишь в условиях нашего опыта.

Теория вероятностей есть наука, изучающая закономерности случайных событий.

В связи с развитием новой техники особый интерес представляют статистические закономерности массовых однородных случайных событий (контроль качества продукции, обслуживание серийного производства, работа телефонной станции и т. п.). Здесь в различных вариантах установлена основная теорема теории вероятностей — «закон больших чисел».

Примем как аксиому, что для каждого события A можно определить, по крайней мере теоретически, вероятность этого события — число $P(A)$, представляющее, в некотором смысле, «меру достоверности» данного события и подчиненное естественным требованиям. Предполагается, что вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1;$$

причем вероятность невозможного события равна нулю, а вероятность достоверного события равна единице.

На практике считают, что если вероятность события мала, то это событие практически невозможно; наоборот, если вероятность события близка к единице, то это событие почти достоверно; и сообразно этому принимают обоснованные решения.

В создании теории вероятностей участвовали многие крупные математики (Паскаль, Ферма, Лаплас, Гаусс, Пуассон и др.). В более поздний период решающие успехи в этой науке принадлежат отечественным математикам (Чебышев, Марков, Ляпунов, Бернштейн, Колмогоров, Хинчин и др.).

Теория вероятностей широко используется в теоретических и прикладных науках (в физике, геодезии, в теории стрельбы, в теории автоматического управления и многих других). В частности, она служит теоретической базой математической и прикладной статистики, на основе которых происходит планирование и организация производства.

§ 2. Алгебра событий

С каждым испытанием связан ряд интересующих нас событий, которые, вообще говоря, могут появляться одновременно. Например, пусть при бросании игральной кости (т. е. кубика, на гранях которого имеются очки 1, 2, 3, 4, 5, 6) событие A есть выпадение одного очка, а событие B есть выпадение нечетного числа очков. Очевидно, эти события не исключают друг друга.

Пусть все возможные результаты испытания осуществляются в ряде единственно возможных частных случаев, взаимно исключающих друг друга (так называемые *элементарные события* или *элементарные исходы*). Тогда 1) каждый исход испытания представляется одним и только одним элементарным событием; 2) всякое событие A, связанное с этим испытанием, есть множество (совокупность) конечного или бесконечного числа элементарных событий; 3) событие A происходит тогда и только тогда, когда реализуется одно из элементарных событий, входящих в это множество.

Пример 1. Пусть событие A состоит в выпадении нечетного числа очков при однократном бросании игральной кости.

За элементарные события здесь могут быть приняты следующие результаты испытания: (1), (2), (3), (4), (5), (6). Событие A представляет собой множество событий {(1), (3), (5)}.

По аналогии с теорией множеств (см. § 1) строится алгебра событий.

Определение 1. *Под суммой двух событий A и B понимается событие*

$$A+B\equiv A\cup B,$$

которое имеет место тогда и только тогда, когда произошло хотя бы одно из событий A и B.

В общем случае, под *суммой нескольких событий* понимается событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример 2. Пусть событие A есть выигрыш по займу I, а событие B — выигрыш по займу II. Тогда событие $A+B$ есть выигрыш хотя бы по одному займу (возможно, по двум сразу!).

Определение 2. *Произведением двух событий A и B называется событие*

$$AB \equiv A \cap B,$$

состоящее в одновременном появлении как события A, так и события B.

В общем случае, под *произведением нескольких событий* понимается событие, состоящее в одновременном осуществлении всех этих событий.

Пример 3. Пусть события A и B есть успешные прохождения соответственно туров I и II при поступлении в институт. Тогда событие AB представляет собой успешное прохождение обоих туров.

События A и B называются *несовместными* в данном испытании, если произведение их есть событие невозможное, т. е.

$$AB = O,$$

где O — невозможное событие.

Иными словами, два события несовместны, если появление одного из них исключает появление другого и наоборот.

§ 3. Классическое определение вероятности

Пусть событие A — некоторый исход испытания и

$$E_1, E_2, \ldots, E_n \tag{1}$$

— конечная система всех возможных и единственно возможных попарно несовместных элементарных исходов этого испытания (*полная система элементарных событий*). Таким образом, событие A происходит тогда и только тогда, когда имеют место некоторые события из системы (1) (благоприятные или благоприятствующие исходы или так называемые шансы для события A).

Предположим, что события системы (1) *равновозможны*, т. е. нет основания предполагать, что одно из событий системы (1) превалирует, в смысле появления, перед другими. Иногда это можно установить, используя «свойство симметрии».

Определение 1. *Под вероятностью $P(A)$ события A понимается отношение числа равновозможных элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу всех равновозможных и единственно возможных элементарных исходов данного испытания.*

Таким образом, если m — число элементарных исходов, благоприятных событию A, и n — общее число всех элементарных исходов при данном испытании, и все эти исходы равновозможны, то на основании определения имеем формулу

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (2)$$

Так как, очевидно, $0 \leqslant m \leqslant n$, то

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \qquad (3)$$

т. е. *вероятность любого события есть неотрицательное число, не превышающее единицы.*

Замечание. Из определения вероятности следует, что равновозможные элементарные события являются *равновероятными*, т. е. обладают одной и той же вероятностью.

Из определения вероятности вытекают следующие основные ее свойства.

1. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие A невозможно, то число благоприятных ему элементарных исходов $m=0$, и мы имеем

$$P(A)=\frac{0}{n}=0.$$

2. *Вероятность достоверного события равна единице.*

В самом деле, если событие A достоверно, то, очевидно, $m=n$ и, следовательно,

$$P(A)=\frac{n}{n}=1.$$

Приведем некоторые элементарные теоремы о вероятностях.

Определение 2. *Два события A и B называются эквивалентными:*

$$A=B,$$

если каждое из них происходит всякий раз, когда происходит другое.

С точки зрения теории вероятностей такие события считаются равными.

Например, если в урне содержатся только белые и черные шары, то появление черного шара и появление небелого шара есть события эквивалентные.

Теорема 1. *Эквивалентные события имеют одинаковые вероятности, т. е. если $A=B$, то*

$$P(A)=P(B). \tag{4}$$

Действительно, каждый элементарный исход для события A является таковым же для события B и обратно. В силу формулы (2) справедливо равенство (4).

Определение 3. *Говорят, что из события A следует событие B ($A \Rightarrow B$), если событие B появляется всякий раз, как только произошло событие A.*

Например, для любых событий A и B имеем $AB \Rightarrow A$ и $AB \Rightarrow B$.

Теорема 2. *Если $A \Rightarrow B$, то*

$$P(A) \leqslant P(B). \tag{5}$$

В самом деле, пусть события A и B включены в общую систему равновероятных элементарных исходов, причем m и m' — число благоприятных элементарных исходов соответственно для событий A и B, а n — общее число элементарных исходов. Так как каждый элементарный исход для события A является также элементарным исходом для события B, то $m \leqslant m'$ и, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n} \leqslant \frac{m'}{n}=P(B),$$

и таким образом, неравенство (5) доказано.

Определение 4. *Событие $\bar{A}$, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A, называется противоположным последнему.*

Например, если при бросании монеты событие A есть выпадение герба, то событие $\bar{A}$ представляет собой невыпадение герба, т. е. выпадение решетки.

Из определения 4 следует, что 1) событие $A+\bar{A}$ достоверно; 2) событие $A\bar{A}$ невозможно.

Теорема 3. *Вероятность противоположного события $\bar{A}$ равна дополнению вероятности данного события*

A до 1, т. е.

$$P(\overline{A})=1-P(A). \quad (6)$$

Действительно, пусть полная система равновозможных элементарных исходов содержит n событий, из которых m $(m \leqslant n)$ благоприятны событию A. Тогда $n-m$ элементарных исходов неблагоприятны событию A, т. е. благоприятствуют событию $\overline{A}$. Таким образом, имеем

$$P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A).$$

Приведем ряд примеров на непосредственное вычисление вероятностей событий.

Пример 1. Монета бросается два раза. Какова вероятность: 1) выпадения герба хотя бы один раз (событие A); 2) двукратного выпадения герба (событие B)?

Равновозможными элементарными исходами здесь являются: ГГ, ГР, РГ, РР; число их $n=4$.

Событию A благоприятствуют исходы ГГ, ГР, РГ, число которых $m=3$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{4}.$$

Событию B благоприятствует один исход ГГ $(m'=1)$. Поэтому

$$P(B)=\frac{m'}{n}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Игральная кость бросается два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6 (событие A)?

Равновозможными элементарными исходами здесь являются пары (x, y), где x и y принимают значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6; общее число элементарных исходов $n=36$.

Событию A благоприятствуют пары (1, 5), (2, 4), (3, 3) (4, 2), (5, 1), число которых $m=5$.

Следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{36}.$$

§ 4. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности события предполагает, что 1) число элементарных исходов конечно; 2) эти исходы равновозможны.

Однако на практике встречаются испытания с бесконечным числом различных возможных исходов. Кроме того, нет общих методов, позволяющих результат испытания, даже с конечным числом исходов, представить в виде суммы равновозможных элементарных исходов.

Поэтому применение классического определения вероятности весьма ограниченно.

Мы укажем сейчас другое определение вероятности, иногда более удобное для приложений.

Пусть производится n однотипных испытаний, одним из исходов которых является данное событие A.

Определение 1. *Отношение числа появлений m события A к общему числу испытаний n называется относительной частотой (частостью) события A.*

Таким образом, обозначая через $W_n(A)$ относительную частоту события A при n испытаниях, будем иметь

$$W_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Очевидно, $0 \leqslant W_n(A) \leqslant 1$.

Из формулы (1) получаем

$$m = W_n(A)\, n, \tag{2}$$

т. е. *число появлений события A равно его относительной частоте, умноженной на число испытаний.*

При однотипных массовых испытаниях во многих случаях наблюдается устойчивость относительной частоты события, т. е. при числе испытаний $n \to \infty$ относительная частота $W_n(A)$ события A колеблется около некоторого постоянного числа p, причем эти отклонения тем меньше, чем больше произведено испытаний, если не учитывать отдельные неудачные испытания. Это число p называется вероятностью события A в статистическом смысле.

Определение 2. *Под вероятностью события в статистическом смысле понимается почти достоверный предел его относительной частоты при неограниченно растущем числе испытаний.*

Таким образом, почти достоверно, что относительная частота события приближенно совпадает с его статистической вероятностью, если число испытаний достаточно велико.

С этой точки зрения величина

$$\mu = np \tag{3}$$

представляет собой среднее значение числа появления события A при n испытаниях.

При широких предположениях доказывается, что вероятности события в классическом и статистическом смыслах совпадают между собой.

Пример. В результате ряда испытаний было обнаружено, что при 200 выстрелах стрело́к попадает в цель в среднем 190 раз. Какова вероятность p поражения цели этим стрелком? Сколько для него попаданий в цель можно ожидать при 1000 выстрелов?

Используя статистическое определение вероятности, имеем

$$p=\frac{190}{200}=0,95=95\ \%.$$

Отсюда число удачных выстрелов из 1000 выстрелов примерно составляет

$$\mu=1000\cdot 0,95=950.$$

§ 5. Теорема сложения вероятностей

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*, т. е. если $AB=0$, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть из общего числа n всех возможных и равновозможных элементарных исходов испытания m_1 благоприятствуют событию A, а m_2 — событию B. Так как события A и B несовместны, то появление события A исключает появление события B и обратно; поэтому число благоприятных исходов события $A+B$ в точности равно m_1+m_2. Отсюда на основании классического определения вероятности получаем

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Следствие. *Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

Пусть, например, события A, B и C попарно несовместны, т. е. события AB, AC, BC невозможны.

Имеем

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C).$$

Замечание. Пусть теперь события A и B совместны. Тогда число благоприятных элементарных исходов для события $A+B$ будет

$$m=m_1+m_2-m',$$

где m' — число элементарных исходов, благоприятных для события AB. Действительно, складывая числа исходов m_1 и m_2, благоприятных событиям A и B, мы исходы,

благоприятные событию AB, считаем два раза; следовательно, при подсчете числа исходов для события $A+B$ излишнее значение m' следует отбросить.

Поэтому, в общем случае, имеем

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-m'}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{m'}{n}=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (2)$$

Следствие. Так как $P(AB)\geqslant 0$, то из формулы (2) имеем

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B), \qquad (3)$$

т. е. *вероятность суммы двух событий никогда не превосходит суммы вероятностей этих событий.*

Это утверждение, очевидно, справедливо также и для нескольких событий.

Пример. В урне находятся 2 белых, 3 красных и 5 синих одинаковых по размеру шаров. Какова вероятность, что шар, случайным образом извлеченный из урны, будет цветным (не белым)?

Пусть событие A — извлечение красного шара из урны, а событие B — извлечение синего шара. Тогда событие $A+B$ есть извлечение цветного шара из урны. Очевидно, имеем

$$P(A)=3/10, \quad P(B)=5/10.$$

Так как события A и B несовместны (извлекается только один шар), то по теореме сложения имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}3+0{,}5=0{,}8.$$

§ 6. Полная группа событий

Определение. *Система событий*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \qquad (1)$$

называется полной группой событий для данного испытания, если любым исходом его является одно и только одно событие этой группы.

Иными словами, для полной группы событий (1) выполнены следующие условия:

1) событие $A_1+A_2+\ldots+A_n$ достоверно;

2) события A_i и A_j $(i\neq j)$ попарно несовместны, т. е. $A_iA_j=O$ $(i\neq j)$, где O — событие невозможное.

Простейшим примером полной группы событий является пара событий: A и $\overline{A}$.

Теорема. *Сумма вероятностей событий полной группы равна единице.*

Доказательство. Для полной группы (1) событие $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = D$ достоверно, а события этой группы попарно несовместны. Отсюда на основании теоремы сложения вероятностей имеем

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad (2)$$

Но

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(D) = 1,$$

поэтому из (2) имеем

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

§ 7. Теорема умножения вероятностей

Определение 1. *Вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется условной вероятностью события A и обозначается так:*

$$P(A/B) = P_B(A). \quad (1)$$

Замечание. Вероятность каждого события A в данном испытании связана с наличием известного комплекса условий. При определении условной вероятности мы предполагаем, что в этот комплекс условий обязательно входит событие B. Таким образом, мы фактически имеем другой, более обременительный комплекс условий, соответствующий испытанию в новой обстановке. Вероятность $P_B(A)$ появления события A при этих новых условиях называется его условной вероятностью, в отличие от вероятности $P(A)$, которая может быть названа безусловной вероятностью события A.

Пример. В урне находятся 7 белых и 3 черных шара.

Какова вероятность: 1) извлечения из урны белого шара (событие A); 2) извлечения из урны белого шара после удаления из нее одного шара, который является белым (событие B) или черным (событие C)?

Здесь

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad P_B(A) = \frac{6}{9} = 0{,}666\ldots; \quad P_C(A) = \frac{7}{9} = 0{,}777\ldots$$

Таким образом, условная вероятность события может быть как меньше, так и больше вероятности этого события.

Определение 2. *Два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого*, т. е.

$$P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) \quad (2)$$

и

$$P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B). \quad (2')$$

В противном случае события называются *зависимыми*.

Теорема 1. *Вероятность произведения (совмещения) двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое имеет место*, т. е.

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B). \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть событию A благоприятствуют m, а событию AB благоприятствуют k равновозможных элементарных исходов из общего их количества n. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(AB) = \frac{k}{n}. \qquad (4)$$

Но если событие A произошло, то в этой ситуации возможны лишь те m элементарных исходов, которые благоприятствовали событию A, причем k из них, очевидно, благоприятствуют событию B. Таким образом,

$$P_A(B) = \frac{k}{m}.$$

Отсюда на основании равенств (4) имеем

$$P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A)\,P_A(B). \qquad (5)$$

Теорема доказана.

Так как $BA = AB$, то имеем также

$$P(AB) = P(BA) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (6)$$

Замечание. Формула (5) формально остается верной, если событие A невозможно.

Следствие. *Для любых двух событий A и B справедливо равенство*

$$P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A). \qquad (7)$$

Теорема 2. *Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB) = P(A)\,P(B). \qquad (8)$$

Действительно, полагая, что $P_A(B) = P(B)$, из формулы (5) получаем формулу (8).

Пример. Вероятность поражения цели первым стрелком (событие A) равна 0,9, а вероятность поражения цели вторым стрелком (событие B) равна 0,8. Какова вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним стрелком?

Пусть C — интересующее нас событие; противоположное событие $\overline{C}$, очевидно, состоит в том, что оба стрелка промахнулись. Таким образом, $\overline{C}=\overline{A}\overline{B}$. Так как события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы (при стрельбе один стрелок не мешает другому!), то

$$P(\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=[1-P(A)]\cdot[1-P(B)]=$$
$$=(1-0,9)\cdot(1-0,8)=0,1\cdot 0,2=0,02.$$

Отсюда вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним стрелком, есть

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-0,02=0,98.$$

Теорема 1 допускает обобщение на случай нескольких событий. Например, для случая трех событий A, B и C имеем

$$P(ABC)=$$
$$=P[A\cdot(BC)]=P(A)\cdot P_A(BC)=P(A)\,P_A(B)\,P_{AB}(C). \qquad (9)$$

Определение 3. *События называются независимыми в совокупности, если каждое из них и любое произведение остальных (включающее либо все остальные события, либо часть из них) есть события независимые.*

События, независимые в совокупности, очевидно, попарно независимы между собой; обратное неверно.

Теорема 3. *Вероятность произведения конечного числа независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Действительно, например, для трех независимых в совокупности событий A, B и C из формулы (9), учитывая, что

$$P_A(B)=P(B), \quad P_{AB}(C)=P(C),$$

имеем

$$P(ABC)=P(A)\,P(B)\,P(C)$$

и т. п.

§ 8. Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти в результате появления одного и только одного события H_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ из некоторой полной группы несовместных событий

$$H_1, H_2, \ldots, H_n.$$

События этой группы обычно называются гипотезами.

Теорема. *Вероятность события A равна сумме парных произведений вероятностей всех гипотез, образую-*

щих полную группу, на соответствующие условные вероятности данного события A, т. е.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A) \qquad (1)$$

(**формула полной вероятности**), причем здесь

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1. \qquad (2)$$

Доказательство. Так как

$$A=H_1A+H_2A+\ldots+H_nA,$$

причем, ввиду несовместности событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, события $H_1A, H_2A, \ldots, H_nA$ также несовместны, то на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_iA)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}A,$$

что и требовалось доказать.

Пример. В магазин для продажи поступает продукция трех фабрик, относительные доли которых есть: I — 50%, II — 30% и III — 20%. Для продукции фабрик брак соответственно составляет: I — 2%, II — 3% и III — 5%. Какова вероятность того, что изделие этой продукции, случайно приобретенное в магазине, окажется доброкачественным (событие A)?

Здесь возможны следующие три гипотезы: H_1, H_2, H_3 — приобретенная вещь выработана соответственно на I, II и III фабриках; очевидно, система этих гипотез полная, причем их вероятности

$$P(H_1)=0{,}5, \quad P(H_2)=0{,}3, \quad P(H_3)=0{,}2.$$

Соответствующие условные вероятности события A равны

$$P_{H_1}(A)=1-0{,}02=0{,}98, \quad P_{H_2}(A)=1-0{,}03=0{,}97,$$
$$P_{H_3}(A)=1-0{,}05=0{,}95.$$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}98+0{,}3\cdot 0{,}97+0{,}2\cdot 0{,}95=0{,}971.$$

§ 9. Формула Бейеса

Рассмотрим следующую задачу: имеется полная группа несовместных гипотез

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

вероятности которых $P(H_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ известны до опыта (**вероятности априори**). Производится опыт

(испытание), в результате которого зарегистрировано появление события A, причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности $P_{H_i}(A)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Спрашивается, каковы будут вероятности этих гипотез после опыта (**вероятности апостериори**).

Например, очевидно, следует отбросить гипотезы, отрицающие появление события A. Вообще, проблема состоит в том, что, имея новую информацию, мы должны переоценить вероятности наших гипотез.

Иными словами, нам нужно определить условные вероятности

$$P_A(H_i) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

На основании теоремы умножения вероятностей имеем

$$P(AH_i)=P(A)\cdot P_A(H_i)=P(H_i)\cdot P_{H_i}(A);$$

отсюда

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Для нахождения вероятности $P(A)$ можно использовать формулу полной вероятности

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P_{H_j}(A). \tag{2}$$

Отсюда имеем формулу вероятностей гипотез после опыта (*формулу Бейеса*)

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\,P_{H_j}(A)} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Пример. Вероятность поражения самолета при одиночном выстреле для 1-го ракетного расчета (событие A) равна 0,2, а для 2-го (событие B) — 0,1. Каждое из орудий производит по одному выстрелу, причем зарегистрировано одно попадание в самолет (событие C). Какова вероятность, что удачный выстрел принадлежит первому расчету?

До опыта возможны четыре гипотезы $H_1=AB$, $H_2=A\overline{B}$, $H_3=\overline{A}B$ и $H_4=\overline{A}\overline{B}$; эти гипотезы образуют полную группу событий.

Вероятности их, при независимом действии расчетов, соответственно равны

$$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02, \quad P(H_2)=0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}18,$$
$$P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}08, \quad P(H_4)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72,$$

причем $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=1$.

Условные вероятности для наблюдаемого события C при данных гипотезах будут

$$P_{H_1}(C)=0, \quad P_{H_2}(C)=1, \quad P_{H_3}(C)=1, \quad P_{H_4}(C)=0.$$

Следовательно, гипотезы H_1 и H_4 отпадают; а вероятности гипотез H_2 и H_3 вычисляются по формуле Бейеса

$$P_C(H_2)=\frac{0,18\cdot 1}{0,18\cdot 1+0,08\cdot 1}\approx 0,7, \quad P_C(H_3)=\frac{0,08\cdot 1}{0,18\cdot 1+0,08\cdot 1}\approx 0,3.$$

Таким образом, с вероятностью приблизительно 0,7 можно утверждать, что удачный выстрел принадлежит 1-му расчету.

Б. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

§ 10. Элементы комбинаторики

Рассмотрим совокупность n различных элементов a_1, a_2, ..., a_n. Произвольную упорядоченную **выборку** (возможно, с повторениями) из этих элементов

$$a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_m} \; (1\leqslant \alpha_k\leqslant n; \; k=1, \ldots, m)$$

будем называть *соединением*.

Например, при бросании монеты 10 раз выпадение герба (Г) и выпадение решетки (Р) могут дать соединение

ГГГГРРГРРР.

Определение 1. ***Размещениями*** *из n элементов по m ($m\leqslant n$) называются их соединения, каждое из которых содержит ровно m различных элементов (выбранных из данных элементов) и которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.*

Определим число A_n^m размещений из n элементов a_1, a_2, ..., a_n по m.

Пусть $a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_m}$ — всевозможные размещения, содержащие m элементов. Будем эти размещения строить последовательно. Сначала определим a_{α_1} — первый элемент размещения. Очевидно, из данной совокупности n элементов его можно выбрать n различными способами. После выбора первого элемента a_{α_1} для второго элемента a_{α_2} остается $n-1$ способов выбора и т. д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]. \quad (1)$$

Вводя обозначение *факториала* $n!=1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\, n$, фор-

мулу (1) можно записать в следующем виде:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Определение 2. *Соединения из n элементов, каждое из которых содержит все n элементов и которые отличаются лишь порядком элементов, называются перестановками.*

Очевидно, число перестановок из n элементов равно

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)] = n!. \qquad (3)$$

Условно считают $0! = 1$.

Определение 3. *Сочетаниями из n элементов по m называются такие их соединения, каждое из которых содержит ровно m данных элементов и которые отличаются хотя бы одним элементом.*

Обозначим через C_n^m число сочетаний из n элементов по m.

Рассмотрим все допустимые сочетания наших элементов

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}.$$

Делая в каждом из них $m!$ возможных перестановок их элементов, очевидно, получим все размещения из n элементов по m. Таким образом, имеем формулу

$$C_n^m \cdot m! = A_n^m;$$

отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}. \qquad (4)$$

Формулу (4) можно представить также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (5)$$

Символ C_n^m обладает очевидным свойством

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad (6)$$

которое будет верно также и при $m = 0$, если принять $C_n^0 = 1$.

Числа C_n^m являются коэффициентами в формуле *бинома Ньютона*

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + q^n$$

и поэтому часто называются *биномиальными коэффициентами* (ср. гл. XI, § 5).

Пример. Партия из 10 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность, что при случайной выборке 5 деталей из этой партии все они будут стандартными (событие A)?

Здесь число всех случайных выборок $n=C_{10}^5$, а число выборок, благоприятствующих событию A, есть $m=C_9^5$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(A)=\frac{C_9^5}{C_{10}^5}=\frac{9!}{5!\,4!}\cdot\frac{5!\,5!}{10!}=\frac{1}{2}.$$

§ 11. Биномиальный закон распределения вероятностей

Событие A называется **независимым** в данной системе испытаний, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.

Серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A)=p$, не зависящую от номера испытания, называется *схемой Бернулли.*

Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеются только два исхода: 1) событие A («успех») и 2) событие $\overline{A}$ («неудача»), с постоянными вероятностями $P(A)=p$ и $P(\overline{A})=q$, причем, очевидно, $p+q=1$.

Рассмотрим задачу: в условиях схемы Бернулли определить вероятность $P_n(m)$ $(0\leqslant m\leqslant n)$ того, что при n испытаниях событие A, имеющее одну и ту же вероятность $P(A)=p$ для каждого отдельного испытания, появится ровно m раз.

Благоприятные серии испытаний здесь имеют вид

$$A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\ldots A_{\alpha_n},$$

где $A_{\alpha_i}=A$ или $\overline{A}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, причем событие A встречается ровно m раз, а событие $\overline{A}$ — ровно $(n-m)$ раз. Так как испытания независимы, то вероятность реализации одной такой благоприятной серии равна p^mq^{n-m}, где $p=P(A)$, $q=P(\overline{A})=1-p$. Все благоприятные серии получаются в результате выбора различных m номеров испытаний из общего количества n номеров и, следовательно, число их равно C_n^m. Отсюда, применяя теорему сложения вероятностей для случая несовместных событий, для вероятности появления события A точно m раз при n испытаниях получим *формулу Бернулли*

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Эта формула называется также *биномиальной*, так как ее правая часть представляет собой $(m+1)$-й член бинома Ньютона

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n.$$

Отсюда получаем биномиальное распределение вероятностей (см. § 15) числа появлений события A при n независимых испытаниях:

$$1 = (q+p)^n = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n). \quad (2)$$

Пример. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты герб выпадет ровно 5 раз.

Здесь вероятность выпадения герба при одиночном испытании $p = 1/2$, отсюда $q = 1 - p = 1/2$.

По формуле Бернулли имеем

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0{,}25.$$

§ 12. Локальная теорема Лапласа

Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Лаплас получил важную приближенную формулу для вероятности $P_n(m)$ появления события A точно m раз, если n — достаточно большое число.

Теорема Лапласа. *Пусть $p = P(A)$ — вероятность события A, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласа*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-t^2/2}, \quad (1)$$

где

$$q = 1 - p \quad \text{и} \quad t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2)$$

Доказано, что относительная погрешность формулы (1) стремится к нулю при $n \to \infty$. Доказательство этой теоремы имеется в полных курсах теории вероятностей.

В статистическом смысле $\mu = np$ представляет собой среднее значение числа появлений m события A при n испытаниях; таким образом, $m - np$ есть отклонение числа появлений события A от его среднего значения. Что касается выражения $\sigma = \sqrt{npq}$, то теоретиковероятностный

смысл его будет выяснен позднее (см. § 18). Рассматривая σ как некий масштаб для отклонений при n испытаниях, число t можно наглядно представить себе как отклонение числа появлений события A от его среднего значения, измеренное в этом масштабе.

Введя функцию

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \tag{3}$$

(эта функция табулирована), формулу (1) можно переписать в виде

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{4}$$

Так как функция $\varphi_0(t)$ монотонно убывает при $|t|\to\infty$, то для одной и той же серии испытаний (n фиксировано) бо́льшие, по абсолютной величине, отклонения $m-np$ менее вероятны, чем меньшие. Это утверждение, понятно, справедливо при достаточно большом числе испытаний n, так как лишь в этом предположении была получена приближенная формула Лапласа.

Пример. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p=0{,}2$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Здесь $p=0{,}2$, $q=0{,}8$, $n=100$ и $m=20$. Отсюда

$$\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=4$$

и, следовательно,

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{20-100\cdot 0{,}2}{4}=0.$$

Учитывая, что $\varphi_0(0)=1/\sqrt{2\pi}\approx 0{,}40$, из формулы (1) получаем

$$P_{100}(20)\approx 0{,}40\cdot\frac{1}{4}=0{,}10.$$

Не следует удивляться, что значение вероятности мало: попадание точно 20 раз при 100 выстрелах есть событие сравнительно редкое! Почти достоверным событием тут является попадание около 20 раз. Например, вероятность P неравенства $15\leqslant m\leqslant 25$, включающего 11 значений $m=15, 16, \ldots, 24, 25$, близка к единице. Это можно проверить, вычисляя вероятность по формуле

$$P=\sum_{k=15}^{25}P_{100}(k).$$

§ 13. Интегральная теорема Лапласа

Поставим вопрос: какова вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что в условиях схемы Бернулли событие A, имеющее вероятность $P(A)=p$ $(0<p<1)$, при n испытаниях появляется не менее m_1 раз и не более m_2 раза?

На основании теоремы сложения вероятности для несовместных событий получим

$$P_n(m_1, m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m). \tag{1}$$

Отсюда, используя локальную теорему Лапласа, приближенно будем иметь

$$P_n(m_1, m_2)\approx\sum_{m=m_1}^{m_2}\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0(t_m), \tag{2}$$

где

$$t_m=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\quad(m_1\leqslant m\leqslant m_2) \tag{3}$$

и

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{4}$$

Имеем

$$\Delta t_m=t_{m+1}-t_m=\frac{(m+1)-np}{\sqrt{npq}}-\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

и, следовательно,

$$P_n(m_1, m_2)\approx\sum_{m=m_1}^{m_2}\varphi_0(t_m)\,\Delta t_m. \tag{5}$$

Сумма (5) является интегральной для функции $\varphi_0(t)$ на отрезке $t_{m_1}\leqslant t\leqslant t_{m_2}$. При $n\to\infty$, т. е. при $\Delta t_m\to 0$, ее предел есть соответствующий определенный интеграл. Поэтому, считая n достаточно большим, получаем приближенную формулу

$$P_n(m_1, m_2)\approx\int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}}\varphi_0(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{6}$$

где

$$t_{m_1}=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\quad t_{m_2}=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Это составляет содержание *интегральной теоремы Лапласа*. Введем *стандартный интеграл вероятностей (функцию Лапласа)*

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad (7)$$

который, очевидно, является первообразной для функции $\varphi_0(x)$.

Тогда на основании формулы Ньютона—Лейбница из (6) будем иметь

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}). \qquad (8)$$

Формула (8) приближенно дает вероятность того, что число m появлений события A при n испытаниях удов-

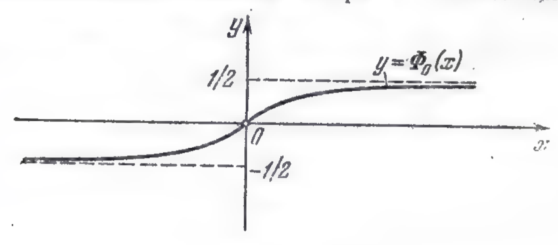


Рис. 270

летворяет неравенству $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$, а следовательно, случайная величина t — неравенству $t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}$. Эту формулу часто записывают так:

$$P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \\ = P(t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}) \qquad (8')$$

(*интегральная формула Лапласа*).

Интеграл $\Phi_0(x)$ не выражается через элементарные функции; для вычисления его используются специальные таблицы, обычно помещаемые в полных курсах теории вероятностей.

Мы приводим здесь часть такой таблицы.

Таблица значений функции $\Phi_0(x)$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\Phi(x)$	0	0,192	0,341	0,433	0,477	0,494	0,499

Функция $\Phi_0(x)$ (рис. 270) обладает следующими свойствами: 1) $\Phi_0(0)=0$; 2) $\Phi_0(+\infty)=1/2$ (см. гл. XXIV, § 4); 3) функция $\Phi_0(x)$ нечетна, т. е. $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$ (поэтому в таблице нет надобности приводить значения функции $\Phi_0(x)$ для отрицательных значений аргумента), в частности, $\Phi_0(-\infty)=-1/2$; 4) $\Phi_0(x)$ — монотонно возрастающая функция (это следует из того, что $\Phi_0'(x)=\varphi_0(x)>0$). При $x>3$, с точностью до тысячных, можно принять $\Phi_0(x)=0{,}500$.

Пример. Вероятность поражения цели при одиночном выстреле одного орудия равна $p=0{,}2$. Какова вероятность того, что при залпе из 100 орудий цель будет поражена не менее 20 раз?

Здесь $n=100$, $20\leqslant m\leqslant 100$. Имеем

$$\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=4.$$

Отсюда

$$t_{20}=\frac{20-100\cdot 0{,}2}{4}=0 \quad \text{и} \quad t_{100}=\frac{100-100\cdot 0{,}2}{4}=20.$$

На основании формулы (8) получаем

$$P(20\leqslant m\leqslant 100)=\Phi_0(20)-\Phi_0(0)=0{,}500-0=0{,}500.$$

Задача. В условиях схемы Бернулли найти вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ события A от его вероятности $P(A)=p$ $(0<p<1)$ по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon>0$.

Эту вероятность мы будем обозначать так:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right).$$

Из неравенства

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon \qquad (9)$$

получаем равносильное неравенство

$$|m-np|\leqslant n\varepsilon, \quad \text{или} \quad -n\varepsilon\leqslant m-np\leqslant n\varepsilon.$$

Отсюда, полагая

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

будем иметь

$$-t_1=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\leqslant t\leqslant\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=t_1.$$

В силу формулы (8′), учитывая нечетность функции $\Phi_0(x)$, находим

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)=P(-t_1\leqslant t\leqslant t_1)=\Phi_0(t_1)-\Phi_0(-t_1)=$$
$$=2\Phi_0(t_1)=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Так как $\Phi_0(+\infty)=\frac{1}{2}$, то

$$2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\to 1 \text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом, *в условиях схемы Бернулли, как бы ни было мало* $\varepsilon>0$, *с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний* n *отклонение* (9) *относительной частоты появления события* A *от его вероятности, по абсолютной величине, будет меньше* ε (закон «больших чисел» в форме Бернулли).

§ 14. Теорема Пуассона

Пусть производится серия n независимых испытаний ($n=1, 2, 3, \ldots$), причем вероятность появления данного события A в этой серии $P(A)=p_n>0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n\to\infty$ (последовательность «редких событий»). Предположим, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т. е.

$$np_n=\mu=\text{const}; \tag{1}$$

отсюда

$$p_n=\frac{\mu}{n}. \tag{2}$$

На основании биномиальной формулы (§ 11) для вероятности появления события A в n-й серии ровно m раз имеем выражение

$$P_n(m)=C_n^m p_n^m(1-p_n)^{n-m}=C_n^m\left(\frac{\mu}{n}\right)^m\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}. \tag{3}$$

Пусть m фиксировано и $n\to\infty$. Тогда

$$C_n^m\left(\frac{\mu}{n}\right)^m=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{m!\,n^m}\mu^m=$$
$$=\frac{\mu^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\to\frac{\mu^m}{m!}.$$

Кроме того (см. гл. VII, § 12), учитывая, что

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

и, следовательно,

$$\lim_{\alpha \to 0} (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-1},$$

имеем

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}\right]^{\mu} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-m} \to e^{-\mu} \cdot 1 = e^{-\mu},$$

если $n \to \infty$.

Таким образом, переходя к пределу в формуле (3) при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n \to \infty} P_n(m) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} C_n^m \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}. \qquad (4)$$

Если n велико, то вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от своего предела (4). Отсюда при больших n для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную *формулу Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \qquad (5)$$

где $\mu = np_n$ *(теорема Пуассона)*.

Вообще, формулу Пуассона можно применять в случаях, когда число испытаний n «велико», вероятность события $p_n = p$ «мала», а $\mu = np$ «не мало и не велико».

Формула Пуассона находит применение в теории массового обслуживания.

Пример. При выработке некоторой массовой продукции вероятность появления одного нестандартного изделия составляет 0,01. Какова вероятность, что в партии 100 изделий этой продукции 2 изделия будут нестандартными?

Здесь вероятность $p = 0{,}01$ мала, а число $n = 100$ велико, причем

$$\mu = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1.$$

Используя закон Пуассона для искомой вероятности, получаем следующее значение:

$$P_{100}(2) \approx \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}184.$$

В. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 15. Случайная дискретная величина и ее закон распределения

Величина называется *случайной*, если она принимает свои значения в зависимости от исходов некоторого испытания (опыта), причем для каждого элементарного исхода она имеет единственное значение. Случайная величина называется *дискретной* (в узком смысле), если множество всех возможных значений ее конечно.

Геометрически множество всех возможных значений дискретной случайной величины представляет конечную систему точек числовой оси.

Пусть X — дискретная случайная величина, возможными и единственно возможными значениями которой являются числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обозначим через

$$p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

вероятности этих значений (т. е. p_i есть вероятность события, состоящего в том, что X принимает значение x_i).

События $X = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, очевидно, образуют полную группу событий, поэтому

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \qquad (1)$$

Определение. *Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется законом распределения данной случайной величины.*

В простейших случаях закон распределения дискретной случайной величины X удобно задавать таблицей:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Здесь первая строка таблицы содержит все возможные значения случайной величины, а вторая — их вероятности.

Заметим, что таблицу значений дискретной случайной величины X, если это целесообразно, формально всегда можно пополнить конечным набором любых чисел, считая их значениями X с вероятностями, равными нулю.

Пример 1. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 руб., 10 выигрышей по 100 руб. и 100 выигрышей по 1 руб., при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Здесь возможные значения для X есть

$$x_1 = 1000, \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0.$$

Вероятности их соответственно будут

$$p_1 = 0{,}0001, \quad p_2 = 0{,}001, \quad p_3 = 0{,}01, \quad p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) \approx 0{,}9889.$$

Закон распределения для выигрыша X может быть задан таблицей:

X	1000	100	1	0
p	0,0001	0,001	0,01	0,9889

Пример 2. Число появлений m события A при n независимых испытаниях можно рассматривать как случайную величину X со значениями $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Закон распределения этой величины дается биномиальной формулой

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$ (биномиальное распределение).

В частности, если p мало и n велико, причем $pn = \mu$ — ограниченная величина, заключенная между двумя фиксированными положительными числами, то приближенно справедливо распределение Пуассона

$$p_m = P(X = m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

§ 16. Математическое ожидание

Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма парных произведений всех возможных ее значений на их вероятности.*

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть (полный) набор всех значений дискретной случайной величины X и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответствующие им вероятности, то, обозначая буквой M математическое ожидание, будем иметь

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{1}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2}$$

Очевидно, математическое ожидание случайной величины X не изменится, если таблицу значений ее пополнить конечным числом любых чисел, считая, что вероятности этих чисел равны нулю.

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины есть величина постоянная и поэтому представляет числовую характеристику случайной величины X.

Пример. Найти математическое ожидание выигрыша X в примере 1 из § 15.

Пользуясь помещенной там таблицей, имеем

$$M(X) = 1000 \cdot 0{,}0001 + 100 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}9889 = $$
$$= 0{,}21 \text{ (руб.)} = 21 \text{ (коп.)}$$

Как нетрудно сообразить, $M(X) = 21$ коп. есть «справедливая» цена билета.

Замечание 1. Отдельные слагаемые $x_i p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ суммы (1) представляют собой математические ожидания случайных величин X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, возможными значениями которых являются x_i и 0 с вероятностями соответственно p_i и $1 - p_i$.

Замечание 2. Пусть $\underline{x} = \min\limits_i x_i$ и $\overline{x} = \max\limits_i x_i$ — соответственно наименьшие и наибольшие возможные значения случайной величины X. Имеем

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \underline{x} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{x} p_i = \overline{x}.$$

Таким образом,

$$\underline{x} \leqslant M(X) \leqslant \overline{x}. \tag{3}$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины является некоторым ее средним значением.

Замечание 3. Математическое ожидание числа появлений события A при одном испытании совпадает с вероятностью этого события $P(A) = p$.

Действительно, пусть X — число появлений события A в данном испытании. Случайная величина X может принимать два значения: $x_1 = 1$ (событие A наступило) с вероятностью $p_1 = p$ и $x_2 = 0$ (событие A не наступило) с вероятностью $p_2 = 1 - p = q$.

Поэтому

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

§ 17. Основные свойства математического ожидания

Укажем важнейшие свойства математического ожидания. Доказательства будут проведены для дискретных случайных величин. Однако соответствующие теоремы справедливы также и для непрерывных случайных величин, поэтому при формулировках этих теорем мы не будем упоминать, что рассматриваемые случайные величины дискретны.

Нам понадобится выяснить смысл арифметических операций $X+Y$, $X-Y$, XY и т. п., где X и Y — дискретные случайные величины. Нетрудно дать соответствующие определения.

Например, под суммой $X+Y$ понимается случайная величина Z, значениями которой являются допустимые суммы $z_{ij}=x_i+y_j$, где x_i и y_j — все возможные значения соответственно случайных величин X и Y, причем соответствующие вероятности равны

$$\pi_{ij}=P(Z=z_{ij})=P(X=x_i)\,P(Y=y_j/X=x_i).$$

Если какая-нибудь из комбинаций x_k+y_l невозможна, то условно полагают $\pi_{kl}=0$; это не отразится на математическом ожидании суммы.

Аналогично определяются остальные выражения.

Различают также независимые и зависимые случайные величины. Две случайные величины считаются *независимыми*, если возможные значения и закон распределения каждой из них один и тот же при любом выборе допустимых значений другой. В противном случае они называются *зависимыми*. Несколько случайных величин называются *взаимно независимыми*, если возможные значения и законы распределения любой из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

Теорема 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной*, т. е. если C — постоянная величина, то

$$M(C)=C. \qquad (1)$$

Доказательство. Постоянную величину C можно рассматривать как случайную дискретную величину, принимающую лишь одно возможное значение C с вероятностью $p=1$. Поэтому

$$M(C)=C\cdot 1=C.$$

Теорема 2. *Математическое ожидание суммы двух (или нескольких) случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин*, т. е. если X и Y — случайные величины, то

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y) \tag{2}$$

и т. п.

Доказательство. 1) Пусть случайная величина X принимает значения x_i с вероятностями p_i ($i=1, 2, \ldots, n$), а случайная величина Y принимает значения y_j с вероятностями p'_j ($j=1, 2, \ldots, m$). Тогда возможными значениями случайной величины $X+Y$ будут суммы x_i+y_j, вероятности которых равны

$$\pi_{ij}=P(X=x_i)P(Y=y_j/X=x_i)= \\ =P(Y=y_j)P(X=x_i/Y=y_j). \tag{3}$$

Как было отмечено выше, все комбинации (i, j) ($i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$) можно считать допустимыми, причем если сумма x_i+y_j невозможна, то полагаем $\pi_{ij}=0$. Имеем

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\pi_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\pi_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\pi_{ij}. \tag{4}$$

Воспользовавшись очевидными свойствами суммы: 1) сумма не зависит от порядка слагаемых и 2) множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно выносить за знак суммы, из (4) получим

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}\pi_{ij}+\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}. \tag{5}$$

Сумма $\sum_{j=1}^{m}\pi_{ij}$ представляет собой вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X принимает значение x_i при условии, что случайная величина Y принимает одно из своих возможных значений (что достоверно); это сложное событие, очевидно, эквивалентно тому, что X принимает значение x_i и поэтому

$$\sum_{j=1}^{m}\pi_{ij}=P(X=x_i)=p_i.$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}=P(Y=y_j)=p'_j.$$

Тогда из формулы (5) получаем

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i+\sum_{j=1}^{m} y_j p'_j=M(X)+M(Y),$$

что и требовалось доказать.

2) Для нескольких случайных величин, например для трех X, Y и Z, имеем

$$M(X+Y+Z)=M[(X+Y)+Z]=$$
$$=M(X+Y)+M(Z)=M(X)+M(Y)+M(Z),$$

и т. д.

Следствие. *Если C — постоянная величина, то*

$$M(X+C)=M(X)+C.$$

Теорема 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*, т. е.

$$M(XY)=M(X)\,M(Y), \qquad (6)$$

где X и Y — независимые случайные величины.

Доказательство. Пусть $(x_i,\ p_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и $(y_j,\ p'_j)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — законы распределения соответственно случайных величин X и Y. Так как X и Y независимы, то полный набор значений случайной величины XY состоит из всех произведений вида $x_i y_j$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, причем вероятности этих значений по теореме умножения для независимых событий равны $p_i p'_j$.

Имеем

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p'_j=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j p'_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i M(Y)=M(X)\,M(Y), \qquad (7)$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.*

Действительно, например для трех взаимно независимых случайных величин X, Y, Z, имеем

$$M(XYZ)=M[(XY)Z]=M(XY)\,M(Z)=M(X)\,M(Y)\,M(Z),$$

и т. п.

С л е д с т в и е 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.*

Если C — постоянная величина и X — любая случайная величина, то, учитывая, что C и X независимы, на основании теоремы 1 получим

$$M(CX) = M(C)\,M(X) = CM(X).$$

С л е д с т в и е 3. *Математическое ожидание разности любых двух случайных величин X и Y равно разности математических ожиданий этих величин*, т. е.

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y).$$

Действительно, используя теорему о сумме математических ожиданий и следствие 2, получим

$$M(X-Y) = M[X+(-Y)] = M(X) + M(-Y) = \\ = M(X) + (-1)\,M(Y) = M(X) - M(Y).$$

§ 18. Дисперсия

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание (с р е д н е е з н а ч е н и е). Случайную величину $X - M(X)$ называют *отклонением*.

Т е о р е м а 1. *Для любой случайной величины X математическое ожидание ее отклонения равно нулю*, т. е.

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, учитывая, что $M(X)$ — постоянная величина, имеем

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

О п р е д е л е н и е. *Д и с п е р с и е й (р а с с е я н и е м) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.*

Отсюда, обозначая дисперсию буквой D, для случайной величины X будем иметь

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \qquad (1)$$

Очевидно, что дисперсия случайной величины постоянна, т. е. является числовой характеристикой этой величины.

Если случайная величина X имеет закон распределения (x_i, p_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то, обозначая для краткости

$M(X)=\mu$, из формулы (1) будем иметь

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i. \qquad (2)$$

Корень квадратный из дисперсии $D(X)$ называется *средним квадратичным отклонением* σ (иначе — стандартом) этой величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (3)$$

Пример. Пусть закон распределения случайной величины задан таблицей:

X	4	10	20
p	1/4	1/2	1/4

Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

Имеем

$$M(X)=4\cdot\frac{1}{4}+10\cdot\frac{1}{2}+20\cdot\frac{1}{4}=11;$$

отсюда

$$D(X)=(4-11)^2\cdot\frac{1}{4}+(10-11)^2\cdot\frac{1}{2}+(20-11)^2\cdot\frac{1}{4}=33$$

и

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{33}\approx 5{,}75.$$

Дисперсия $D(X)$ служит мерой рассеяния (разброса) значений дискретной случайной величины X. Действительно, пусть $D(X)$ мала. Тогда из формулы (2) получаем, что все слагаемые $(x_i-\mu)^2\cdot p_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ также малы. Отсюда следует, что если не обращать внимания на значения, имеющие малую вероятность (такие значения практически невозможны), то все остальные значения x_i мало отклоняются от μ. Таким образом, при малой дисперсии $D(X)$ почти достоверно, что значения случайной величины концентрируются около ее математического ожидания (за исключением, быть может, сравнительно малого числа отдельных значений). В частности, если $D(X)=0$, то, очевидно, $X=\mu$ и случайная величина представляет собой точку на числовой оси. Если $D(X)$ велика, то концентрация значений случайной величины X около какого-нибудь центра исключается.

Теорема 2. *Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом ее математического ожидания*, т. е.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \qquad (4)$$

Доказательство. Используя основные теоремы о математических ожиданиях случайных величин, имеем

$$D(X)=M\{[X-M(X)]^2\}=M\{X^2-2XM(X)+[M(X)]^2\}=$$
$$=M(X^2)-2M(X)\cdot M(X)+[M(X)]^2=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Теорема 3. *Дисперсия постоянной величины равна нулю.*

Действительно, если C — постоянная величина, то $M(C)=C$ и, следовательно,

$$D(C)=M[(C-C)^2]=M(0)=0.$$

Результат этот очевиден, так как постоянная величина изображается одной точкой на числовой оси Ox и не имеет рассеяния.

Теорема 4. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин*, т. е.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \qquad (5)$$

Доказательство. Так как

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y), \qquad (6)$$

то имеем

$$D(X+Y)=M\{[(X+Y)-M(X+Y)]^2\}=$$
$$=M\{[(X-M(X))+(Y-M(Y))]^2\}=$$
$$=M\{[X-M(X)]^2\}+M\{[Y-M(Y)]^2\}+$$
$$+2M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}=D(X)+D(Y)+2K(X,Y),$$

где

$$K(X,Y)=M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}$$

— так называемый *корреляционный момент* величин X и Y. Если случайные величины X и Y независимы, то случайные величины $X-M(X)$ и $Y-M(Y)$, отличающиеся от X и Y на постоянные величины, очевидно, также независимы. Поэтому в силу теорем 3 из § 17 и 1 имеем

$$K(X,Y)=M[X-M(X)]\cdot M[Y-M(Y)]=0$$

и, следовательно, справедлива формула (5).

Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

Следствие 2. *Если C — постоянная величина, то*

$$D(X+C)=D(X).$$

Таким образом, случайные величины X и $X+C$ имеют одинаковую меру рассеяния.

Теорема 5. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат*, т. е.

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Доказательство. Если C — постоянный множитель, то в силу теоремы 2 имеем

$$D(CX)=M(C^2X^2)-[M(CX)]^2=$$
$$=C^2M(X^2)-C^2[M(X)]^2=C^2D(X).$$

Таким образом, рассеяние величины CX в C^2 раз больше рассеяния величины X.

Следствие. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*, т. е. если случайные величины X и Y независимы, то

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Действительно, на основании теорем 4 и 5 имеем

$$D(X-Y)=D[X+(-Y)]=D(X)+D(-Y)=$$
$$=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y).$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются ее основными числовыми характеристиками.

Задача. Определить математическое ожидание и дисперсию для числа X появления события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события $P(A)=p$ постоянна.

Случайная величина X принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$ и распределена по биномиальному закону

$$p_m=P(X=m)=C_n^mp^mq^{n-m}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$

где $q=P(\bar{A})=1-p$.

Величину X можно рассматривать как сумму независимых случайных величин

$$X=X_1+X_2+\ \ldots\ +X_n,$$

где $X_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — число появлений события A в i-м испытании. Случайная величина X_i принимает лишь два значения: 1, если событие A появилось в i-м испытании, и 0, если событие A не произошло в i-м испытании. Вероятности этих значений $P(A)=p$ и $P(\bar{A})=q$. Отсюда

$$M(X_i)=1\cdot p+0\cdot q=p\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(см. также § 16). Отсюда, используя теорему о математическом ожидании суммы, будем иметь

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)=np. \qquad (8)$$

Таким образом, математическое ожидание числа появлений события A в условиях схемы Бернулли совпадает со «средним числом» появления этого события в данной серии испытаний.

Для дисперсии случайной величины X_i получаем

$$D(X_i)=(1-p)^2p+(0-p)^2q=q^2p+p^2q=pq(q+p)=pq.$$

Отсюда по свойству дисперсии суммы независимых случайных величин (теорема 4) будем иметь

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)=npq. \qquad (9)$$

Поэтому среднее квадратичное отклонение (стандарт)

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}. \qquad (10)$$

Формулы (8) и (9) дают математическое ожидание и дисперсию для биномиального закона распределения.

Замечание. Теперь становится понятным смысл случайной величины

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

в приближенных формулах Лапласа (§§ 12—13), а именно, t представляет собой отклонение числа появлений события A от его математического ожидания, измеренное в стандартах (так называемое нормированное отклонение).

Рассмотрим n дискретных попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, дисперсии $D(X_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ которых равномерно ограничены:

$$0\leqslant D(X_i)\leqslant K \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Эти величины, возможно, имеют значительный разброс, однако их среднее арифметическое

$$\hat{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

ведет себя достаточно «кучно».

А именно, при указанных выше условиях имеет место замечательная теорема Чебышева: *для любого положительного* $\varepsilon>0$ *вероятность неравенства*

$$|\hat{X}_n-M(\hat{X}_n)|<\varepsilon, \text{ где } M(\hat{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i),$$

сколь угодно близка к 1, *если число случайных величин n достаточно велико*, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{X}_n - M(\hat{X}_n)| < \varepsilon) = 1$$

(закон больших чисел в форме Чебышева).

Теорема Чебышева находит применение в теории ошибок, статистике и т. п.

§ 19. Непрерывные случайные величины. Функция распределения

Случайную величину X будем называть *непрерывной*, если все ее возможные значения целиком заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток $\langle a, b \rangle$ числовой оси. Предполагается, что при каждом испытании случайная величина X принимает одно и только одно значение $x \in \langle a, b \rangle$. Заметим, что дискретные и непрерывные случайные величины не исчерпывают все типы случайных величин.

Для характеристики непрерывной случайной величины X вводят *функцию распределения*

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x), \qquad (1)$$

называемую интегральным законом распределения [1]).

Если значения случайной величины X рассматривать как точки числовой оси Ox, то $\Phi(x)$ представляет собой вероятность события, состоящего в том, что наблюдаемое значение случайной величины X принадлежит интервалу $(-\infty, x)$, т. е. находится левее точки x. Этот интервал зависит от правого конца его x, и поэтому естественно вероятность является функцией от x, определенной на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Заметим, что функция распределения имеет смысл также для дискретных случайных величин.

Функция распределения $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами.

I. Функция $\Phi(x)$ есть неубывающая функция аргумента x, т. е. если $x < x'$, то $\Phi(x) \leqslant \Phi(x')$.

Действительно, если $x' > x$, то из события $X \in (-\infty, x)$, очевидно, следует событие $X \in (-\infty, x')$. Но тогда веро-

---

[1]) Здесь вероятность понимается в аксиоматическом смысле. См. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1969, гл. I, § 8.

ятность $\Phi(x')$ второго события не меньше вероятности $\Phi(x)$ первого (§ 3, теорема 2).

II. Так как $\Phi(x)$ — вероятность, то справедливо неравенство

$$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1.$$

III. $$\Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi(+\infty) = 1.$$

Действительно, событие $X \in (-\infty, -\infty)$, очевидно, невозможно, а событие $X \in (-\infty, +\infty)$ достоверно.

Зная функцию распределения $\Phi(x)$, можно для любого промежутка $[a, b)$ определить $P(a \leqslant X < b)$ — вероятность попадания случайной величины X в этот промежуток (здесь принято левый конец a промежутка включать, а правый b не включать в этот промежуток).

В самом деле, пусть A есть событие $X \in (-\infty, a)$, B — событие $X \in (-\infty, b)$ и C — событие $X \in [a, b)$.

Тогда, очевидно, имеем

$$B = A + C.$$

Так как события A и C несовместны, то по теореме сложения вероятностей получаем $P(B) = P(A) + P(C)$, отсюда

$$P(C) = P(B) - P(A),$$

т. е.

$$P(a \leqslant X < b) = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2}$$

причем $\Phi(b) - \Phi(a) \geqslant 0$ в силу свойства I.

Таким образом, *вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее промежутку $[a, b)$, равна приращению ее функции распределения на этом промежутке.*

В дальнейшем случайную величину X будем называть непрерывной лишь в том случае, когда ее функция распределения $\Phi(x)$ непрерывна на оси $(-\infty, +\infty)$.

Теорема. *Вероятность (до опыта) того, что непрерывная случайная величина X примет заранее указанное строго определенное значение a, равна нулю.*

В самом деле, в силу формулы (2) имеем

$$P(a \leqslant X < x) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{3}$$

Положим, что $x \to a$; тогда в пределе промежуток $[a, x)$ будет содержать единственную точку a. Кроме того, в силу непрерывности функции $\Phi(x)$ в точке a имеем

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a).$$

Переходя к пределу при $x \to a$ в равенстве (3), получим

$$P(a) = \lim_{x \to a} \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi(a) - \Phi(a) = 0.$$

Таким образом, при непрерывной функции распределения вероятность «попадания в точку» равна нулю.

Следствие. *Для непрерывной случайной величины X справедливы равенства*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (2')$$

и

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (2'')$$

где $\Phi(x) = P(a \leqslant X < x)$ — *ее функция распределения.*

Действительно,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) + P(X = b) =$$
$$= [\Phi(b) - \Phi(a)] + 0 = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Замечание. В общем случае невозможные события и события с нулевой вероятностью могут оказаться неэквивалентными.

Предположим теперь, что для непрерывной случайной величины X ее функция распределения $\Phi(x)$ имеет непрерывную производную

$$\Phi'(x) = \varphi(x). \qquad (4)$$

Функцию $\varphi(x)$ называют *плотностью вероятности* (для данного распределения) или *дифференциальным законом распределения случайной величины* X.

Термин плотность вероятности имеет следующий смысл: пусть $[x, x+dx]$ — бесконечно малый промежуток. Тогда в силу формулы (2') имеем

$$P(x \leqslant X \leqslant x+dx) = \Phi(x+dx) - \Phi(x).$$

Заменяя бесконечно малое приращение функции $\Phi(x+dx) - \Phi(x)$ ее дифференциалом $\Phi'(x)\,dx = \varphi(x)\,dx$, получим приближенное равенство

$$P(x \leqslant X \leqslant x+dx) = \varphi(x)\,dx. \qquad (5)$$

Таким образом, плотность вероятности представляет собой отношение вероятности попадания точки в бесконечно малый промежуток к длине этого промежутка.

Так как плотность вероятности $\varphi(x)$ является производной неубывающей функции $\Phi(x)$, то она неотрицательна: $\varphi(x) \geqslant 0$. В отличие от вероятности, плотность вероятности может принимать сколь угодно большие значения.

Так как $\Phi(x)$ является первообразной для $\varphi(x)$, то на основании формулы Ньютона—Лейбница имеем

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Отсюда в силу (3') получаем

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Геометрически (рис. 271) эта вероятность представляет собой площадь S криволинейной трапеции, ограниченной

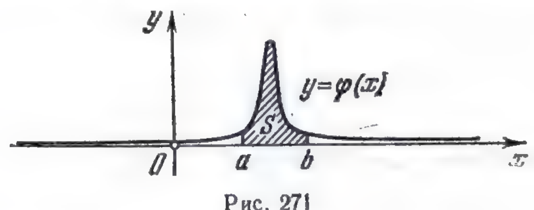


Рис. 271

графиком плотности вероятности $y=\varphi(x)$, осью Ox и двумя ординатами $x=a$ и $x=b$.

Полагая $a=-\infty$ и $b=+\infty$, получаем достоверное событие $X \in (-\infty, +\infty)$, вероятность которого равна единице. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1. \tag{7}$$

Полагая в формуле (6) $a=-\infty$, $b=x$ и обозначая для ясности переменную интегрирования x другой буквой, например t (это законно для определенного интеграла), получаем функцию распределения

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt. \tag{8}$$

§ 20. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Будем рассматривать бесконечно малый промежуток $[x, x+dx]$ как «жирную точку» x оси Ox. Тогда вероятность того, что случайная величина X принимает значение, совпадающее с этой «жирной точкой» x, равна $\varphi(x)\,dx$ и

математическое ожидание этого события есть

$$dM = x\varphi(x)\,dx.$$

Представляя прямую $-\infty < x < +\infty$ как бесконечное множество таких «жирных точек», по аналогии с определением математического ожидания дискретной случайной величины, получаем естественное определение математического ожидания непрерывной случайной величины (только здесь суммирование заменяется интегрированием).

Определение. *Под математическим ожиданием непрерывной случайной величины X понимается число*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

(*конечно, это определение имеет смысл лишь для таких случайных величин X, для которых интеграл* (1) *сходится*).

Для дисперсии непрерывной случайной величины X сохраним прежнее определение

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

Из формулы (1) вытекает

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

(конечно, в предположении, что интеграл (2) сходится). Можно также пользоваться формулой

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx\right]^2. \tag{3}$$

Можно доказать, что основные свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются также и для непрерывных случайных величин.

Пусть теперь все возможные значения непрерывной случайной величины X целиком заполняют конечный отрезок $[a, b]$. Тогда $\varphi(x) = 0$ при $-\infty < x < a$ и при $b < x < +\infty$ и, следовательно,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x\varphi(x)\,dx + \int_{a}^{b} x\varphi(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0 + \int_{a}^{b} x\varphi(x)\,dx + 0 = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

аналогично,

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2\varphi(x)\,dx, \quad \text{причем} \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx=1.$$

§ 21. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X, все возможные значения которой заполняют конечный промежуток $\langle a, b\rangle$, называется *равномерно распределенной*, если ее плотность вероятности $\varphi(x)$ постоянна на этом промежутке.

Рис. 272

Иными словами, для равномерно распределенной случайной величины все ее возможные значения являются равновозможными.

Пусть, например, $X\in[a, b]$. Так как в этом случае $\varphi(x)=\text{const}$ при $x\in[a, b]$ и $\varphi(x)=0$ при $x\notin[a, b]$, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\varphi(x)\int_a^b dx=(b-a)\,\varphi(x)=1;$$

отсюда

$$\varphi(x)=\frac{1}{b-a} \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Пусть $[\alpha, \beta]\in[a, b]$ (рис. 272). Тогда

$$p=P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

т. е.

$$p=\frac{l}{L}, \tag{1}$$

где L — длина (линейная мера) всего отрезка $[a, b]$ и l — длина частичного отрезка $[\alpha, \beta]$.

Значения случайной величины X, т. е. точки x отрезка $[a, b]$, можно рассматривать как всевозможные элементарные исходы некоторого испытания. Пусть событие A состоит в том, что результат испытания принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$. Тогда точки отрезка $[\alpha, \beta]$ есть благоприятные элементарные исходы события A.

Согласно формуле (1) имеем **геометрическое определение вероятности**: *под вероятностью события A понимается отношение меры l множества элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к мере L множества всех возможных элементарных исходов в предположении, что они равновозможны*:

$$P(A)=\frac{l}{L}\leqslant 1.$$

Это определение естественно переносит классическое определение вероятности на случай бесконечного числа элементарных исходов.

Аналогичное определение можно ввести также тогда, когда элементарные исходы испытания представляют собой точки плоскости или пространства.

Пример 1. В течение часа $0\leqslant t\leqslant 1$ (t — время в часах) на остановку прибывает один и только один автобус. Какова вероятность того, что пассажиру, пришедшему на эту остановку в момент времени $t=0$, придется ожидать автобус не более 10 мин?

Здесь множество всех элементарных исходов образует отрезок $[0, 1]$, временнáя длина которого $L=1$, а множество благоприятных элементарных исходов составляет отрезок $[0, 1/6]$ временнóй длины $l=1/6$.

Поэтому искомая вероятность есть

$$p=l/L=1/6.$$

Рис. 273

Пример 2. В квадрат K со стороной a с вписанным в него кругом S (рис. 273) случайно бросается материальная точка M. Какова вероятность того, что эта точка попадает в круг S?

Здесь площадь квадрата есть $K=a^2$, а площадь круга $S=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}a^2$.

За искомую вероятность естественно принять отношение

$$p=\frac{S}{K}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785.$$

Эта вероятность, а следовательно, и число π, очевидно, могут быть определены экспериментально.

§ 22. Нормальное распределение

Распределение вероятностей случайной величины X называется *нормальным*, если плотность вероятности подчиняется **закону Гаусса**

$$\varphi(x)=ae^{-b(x-x_0)^2}, \qquad (1)$$

где a, b и x_0 — некоторые постоянные, причем $a > 0$ и $b > 0$. В этом случае график плотности вероятности представляет собой смещенную кривую Гаусса (рис. 274), симметричную относительно прямой $x = x_0$ и с максимальной ординатой $y_{max} = a$.

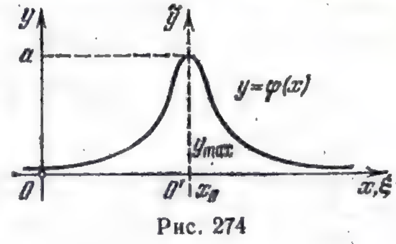


Рис. 274

Для удобства выкладок эту кривую центрируем, введя новые координаты $\xi = x - x_0$ и $\eta = y$. Тогда закон Гаусса примет вид

$$\tilde{\varphi}(\xi) = ae^{-b\xi^2} \qquad (2)$$

и будет представлять собой дифференциальный закон распределения случайной величины $\tilde{X} = X - x_0$.

Постоянные a и b в формуле (2) не являются произвольными, так как для плотности вероятностей $\tilde{\varphi}(\xi)$ должно быть выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2} d\xi = 1. \qquad (3)$$

Делая замену переменной $b\xi^2 = t^2$, $\xi = \frac{t}{\sqrt{b}}$, $d\xi = \frac{dt}{\sqrt{b}}$, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \qquad (4)$$

(см. гл. XXIV, § 4). Отсюда на основании формулы (3) находим

$$a\sqrt{\frac{\pi}{b}} = 1, \qquad (5)$$

т. е.

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}. \qquad (6)$$

Таким образом,

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-b\xi^2}. \qquad (7)$$

Для математического ожидания случайной величины будем иметь

$$M(\tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-b\xi^2}\, d\xi = 0$$

(ввиду нечетности подынтегральной функции). Отсюда

$$M(X) = M(\tilde{X} + x_0) = M(\tilde{X}) + M(x_0) = 0 + x_0 = x_0. \qquad (8)$$

Таким образом, при нормальном распределении случайной величины X ее математическое ожидание x_0 совпадает с точкой пересечения оси симметрии графика соответствующей кривой Гаусса с осью Ox (центр рассеивания).

Для дисперсии случайной величины $\tilde{X}$ получаем

$$D(\tilde{X}) = M(\tilde{X}^2) - [M(\tilde{X})]^2 =$$

$$= M(\tilde{X}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-b\xi^2} d\xi. \qquad (9)$$

Полагая $u = \xi$ и $dv = \xi e^{-b\xi^2} d\xi = d\left(-\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\right)$ и интегрируя по частям, с учетом формулы (4) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-b\xi^2} d\xi = -\xi \cdot \frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\, d\xi = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

Таким образом, из формулы (9) получаем

$$D(\tilde{X}) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2b\sqrt{b}} = \frac{1}{2b};$$

и следовательно,

$$D(X) = D(\tilde{X} + x_0) = D(\tilde{X}) + D(x_0) = \frac{1}{2b} + 0 = \frac{1}{2b}. \qquad (10)$$

Отсюда для среднего квадратичного отклонения величины X получим

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\sqrt{2b}}.$$

Введя обозначение $\sigma = \sigma(X)$, будем иметь

$$b = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad a = \sqrt{\frac{b}{\pi}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (1), получим стандартный вид нормального закона распре-

деления случайной величины X в дифференциальной форме:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (11)$$

где $x_0=M(X)$ и $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

Таким образом, нормальный закон распределения зависит только от двух параметров: математического ожидания и среднего квадратичного отклонения.

Нормальный закон распределения случайной величины в интегральной форме имеет вид

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-x_0)^2}{2\sigma^2}}dz. \qquad (12)$$

Формулы (11) и (12) упрощаются, если ввести нормированное отклонение

$$t=\frac{x-x_0}{\sigma}; \qquad (13)$$

тогда

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\equiv\frac{1}{\sigma}\varphi_0(t)$$

(см. § 12). Полагая в интеграле (12) $\tau=\frac{z-x_0}{\sigma}$, $d\tau=\frac{dz}{\sigma}$, получим

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\sigma}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\frac{1}{2}+\Phi_0(t),$$

где t определяется формулой (13) и $\Phi_0(t)$ — стандартный интеграл вероятностей (см. § 13).

Отсюда получаем, что для случайной величины X, подчиняющейся нормальному закону, вероятность попадания ее на отрезок $[a, b]$ есть

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)=\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right)\right]=\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right). \qquad (14)$$

В частности, вероятность того, что отклонение величины X от ее математического ожидания x_0 по абсолютной величине будет меньше α, равна

$$P(|X-x_0|<\alpha)=P(x_0-\alpha<X<x_0+\alpha)=2\Phi_0\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Полагая $\alpha=3\sigma$, получим

$$P(|x-x_0|<3\sigma)=2\Phi_0(3)=0{,}9973,$$

т. е. такое отклонение является почти достоверным (*правило трех сигм*).

Нормальный закон распределения вероятностей находит многочисленные применения в теории ошибок, теории стрельбы, физике и т. д.

Упражнения

1. Пусть A — случайное событие и C — достоверное событие. Что следует понимать под событиями: $A+A$, AA, $A+C$, AC?

2. Игральная кость бросается один раз. Каковы вероятности следующих событий: A — выпадение одного очка; B — выпадение нечетного числа очков; C — выпадение не менее трех очков?

3. В урне находятся 2 белых и 8 черных шаров. Сколько белых шаров следует добавить в урну, чтобы вероятность извлечения из нее одного белого шара была бы не меньше 0,99?

4. Из урны, содержащей 5 белых шаров и 3 черных шара, случайным образом извлекается 4 шара. Каковы вероятности того, что: а) среди них будет одинаковое число белых и черных; б) число белых превысит число черных?

5. Студент из 30 экзаменационных билетов усвоил 24. Какова вероятность (в %) его успешного ответа на экзамене на билет: а) при однократном извлечении билета и б) при двукратном извлечении билета (вытянутый билет не возвращается!)?

6. Три стрелка одновременно стреляют в цель. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9; вторым — 0,8; третьим — 0,6. Какова вероятность того, что: а) цель будет поражена хотя бы одним стрелком; б) будет зарегистрировано не менее двух попаданий в цель; в) ни один из стрелков не попадет в цель?

7. Доказать, что если события A и B независимы, то события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также независимы.

8. Вероятность поражения цели при одиночном выстреле равна $p=1/3$. Найти распределение вероятностей для числа попаданий m при числе выстрелов $n=5$.

9. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна $p=0{,}2$. При каком числе выстрелов цель будет поражена хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей 0,999?

10. Многократные измерения некоторой величины дали следующие значения (содержащие случайные ошибки): $x_1=1{,}2$ (два раза); $x_2=1{,}3$ (пять раз); $x_3=1{,}4$ (три раза). Предполагая, что эти изменения равноточны, найти математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию результата измерения. Чему равна средняя квадратичная ошибка результата измерения?

11. Дискретные случайные величины X и Y независимы. Доказать, что величины $\tilde{X} = X + C$ и Y (C — постоянная величина) также независимы.

12. Все значения случайной величины X принадлежат интервалу $(0, 2)$, причем плотность вероятности $\varphi(x) = 1/4$ при $0 < x \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 3/4$ при $1 < x < 2$. Найти функцию распределения $\Phi(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

13. Случайная величина X равномерно распределена на центрированном отрезке $[-l, l]$. Найти плотность вероятности $\varphi(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандарт $\sigma(X)$.

14. Показать, что кривая Гаусса

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

имеет точки перегиба при $x = \pm\sigma$.

15. При опытной стрельбе было обнаружено, что отклонение Δ точки попадания от цели подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием $M = 0$ и дисперсией $D = 4$ м². Какова вероятность того, что $|\Delta| < 1$ м?

16. При расфасовке некоторой продукции пакет считается стандартным, если его масса отличается от заданной массы 1 кг не более чем на 20 г (в ту или другую сторону). Проверено, что при аккуратной работе ошибки массы подчиняются нормальному закону с математическим ожиданием $M = 0$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$ г. Некоторая партия этой продукции из 10 000 пакетов содержит 9000 стандартных пакетов. Соответствует ли это данному нормальному закону?

ГЛАВА XXVI

ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

§ 1. Векторное пространство n измерений

В главе XVIII мы видели, что каждый вектор $\boldsymbol{x}$ трехмерного пространства может быть задан тремя координатами: $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$. Обобщая это свойство, приходим к понятию n-мерного вектора.

Определение. *Упорядоченная система n чисел $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется n-мерной точкой или n-мерным вектором.*

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* точки (вектора) $\boldsymbol{x}$; мы будем предполагать, что они действительны. Вектор с нулевыми координатами $0=\{0, 0, \ldots, 0\}$ называется *нулевым вектором* или, короче, *нуль-вектором*. При геометрическом изображении вектор $\boldsymbol{x}$ можно рассматривать как радиус-вектор соответствующей точки.

По аналогии с трехмерными векторами определяются основные операции для n-мерных векторов $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\boldsymbol{y}=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

I. *Равенство векторов.* Два вектора равны тогда и только тогда, когда одинаковы их соответствующие координаты, т. е.

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i=y_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

II. *Сумма векторов.* По определению полагают

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\{x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n\}.$$

В частности, для вектора $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и ему противоположного $-\boldsymbol{x}=\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}$ имеем

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=0,$$

где 0 — нуль-вектор.

III. *Разность векторов:*

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\{x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n\}.$$

Справедливо соотношение

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}).$$

IV. *Умножение на скаляр.* Если k — скаляр, то

$$k\boldsymbol{x}=\{kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\}.$$

V. *Скалярное произведение:*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Под модулем (*нормой*) вектора $\boldsymbol{x}$ понимается число

$$x=|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})}=\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \geqslant 0.$$

Расстояние между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяется формулой

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}.$$

В частности, $|\boldsymbol{x}|$ есть расстояние от начала координат $\mathbf{0}$ до точки $\boldsymbol{x}$.

Полагая $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = xy\cos\varphi$, получаем *угол* между векторами

$$\varphi = \arccos\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{xy}.$$

В частности, если $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$, то $\varphi=\pi/2$ (ортогональные векторы).

Для операций I—V справедливы обычные свойства (см. гл. XVIII).

В частности, если

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{x}^k$$

есть линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m$ (индексы векторов мы ставим сверху) и $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — скаляры, то

$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}\right) = \sum_{k=1}^{m} c_k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}).$$

Совокупность всех n-мерных векторов (точек), для которых определены операции I—V, называется *n-мерным евклидовым пространством E^n*.

Определение. *Векторы $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^m$ пространства E^n называются линейно зависимыми, если существуют скаляры $c_1, c_2, \ldots, c_m$, не все равные нулю* ($|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_m|\neq 0$), *такие, что*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{x}^k = \mathbf{0}.$$

В частном случае, при $m=2$ эти векторы называются коллинеарными, а при $m=3$ — компланарными (ср. гл. XVIII, §§ 5 и 6). В противном случае, эти векторы называются линейно независимыми.

Можно доказать, что в пространстве E^n существует самое большее n линейно независимых векторов. Таким образом, размерность $\dim E^n$ векторного пространства E^n можно определить как максимальное число линейно независимых векторов, помещающихся в этом пространстве.

Пусть $\boldsymbol{x}\in E^n$ и $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ — линейно независимые векторы из E^n. Так как векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ линейно зависимы, то

$$c\boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{n} c_k\boldsymbol{x}^k = \mathbf{0},$$

где, очевидно, $c\neq 0$.

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\boldsymbol{x}^k \qquad \left(\xi_k = -\frac{c_k}{c}\right).$$

Таким образом, каждый вектор $x \in E^n$ можно разложить (и притом единственным способом!) по векторам $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Иными словами, эти векторы образуют *базис* пространства E^n. Числа ξ_k ($k=1, 2, \ldots, n$) называются *координатами* вектора x в данном базисе $x^1, x^2, \ldots, x^n$. В частности, координаты заданного вектора $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть его координаты в базисе о р т о в

$$e^1=\{1, 0, 0, \ldots, 0\},\ e^2=\{0, 1, 0, \ldots, 0\},\ \ldots,\ e^n=\{0, 0, 0, \ldots, 1\}.$$

§ 2. Множества в n-мерном пространстве

Совокупность точек $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ n-мерного пространства E^n называется *множеством* этого пространства.

Множество точек x таких, что

$$0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon,$$

будем называть *окрестностью* U_{x_0} точки x_0 (точнее, *ε-окрестностью*). Точка x_0 не входит в свою окрестность, т. е. окрестность пунктированная.

Множество G называется *открытым*, если каждая точка $x \in G$ этого множества принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

Множество F называется *замкнутым*, если оно является дополнением некоторого открытого множества G, т. е. $F=E^n \setminus G$.

Пусть $E \subset E^n$. Точка ξ, не обязательно принадлежащая E, называется *граничной* для множества E, если ξ не является внутренней ни для множества E, ни для его дополнения $E^C=E^n \setminus E$. Совокупность всех граничных точек множества E называется его *границей*: $\Gamma(E)=\Gamma$. Очевидно, $\Gamma(E^C)=\Gamma(E)$.

О п р е д е л е н и е 1. *Множество точек $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in E^n$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению*

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b \tag{1}$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ постоянны), где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не все равны нулю, называется г и п е р п л о с к о с т ь ю пространства E^n.

В случае трехмерного пространства это множество является обычной плоскостью.

Введя *нормальный вектор* гиперплоскости (1)

$$a=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

ее уравнение можно записать в виде

$$a \cdot x=b. \tag{2}$$

Гиперплоскость (2) делит пространство E^n на два замкнутых полупространства:

$$a \cdot x \leqslant b \quad (E^-), \qquad a \cdot x \geqslant b \quad (E^+)^{1)}.$$

Если свободный член $b \neq 0$, то полупространства E^- и E^+ можно различать следующим образом: 1) если $b > 0$, то E^- содержит начало координат 0, а E^+ не содержит 0; 2) при $b < 0$ — наоборот.

---

[1]) Здесь, следуя традиции, точки гиперплоскости $a \cdot x=b$ причисляются к обоим полупространствам E^- и E^+. Эта гиперплоскость является их о б щ е й г р а н и ц е й.

Пример. Прямая $x_1+x_2=1$ разбивает плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости: $x_1+x_2\leqslant 1$ и $x_1+x_2\geqslant 1$ (рис. 275).

Определение 2. *Совокупность точек*

$$z=x+\beta(y-x), \tag{3}$$

где $0\leqslant\beta\leqslant 1$ (рис. 276), *называется отрезком* $[x, y]$ *с концами* x *и* y.

Формулу (3) можно записать в симметричном виде

$$z=\alpha x+\beta y, \tag{3'}$$

где $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$. При $\alpha=0$, $\beta=1$ и $\alpha=1$, $\beta=0$ получаются концы отрезка; при $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ — внутренние

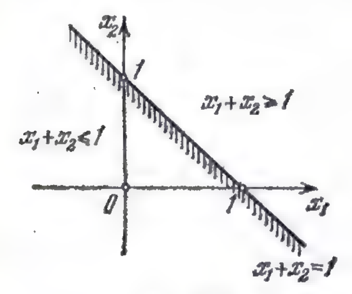


Рис. 275



Рис. 276

точки его. Заметим, что точку x можно рассматривать как отрезок $[x, x]$ с совпадающими концами.

Это определение обобщает понятие отрезка для двумерного и трехмерного пространств.

Определение 3. *Множество* $A\subset E^n$ *называется выпуклым, если для любых двух точек* $x\in A$ *и* $y\in A$ *соединяющий их отрезок* $[x, y]$ *также принадлежит множеству* A: $[x, y]\subset A$.

Примерами выпуклых множеств могут служить точка, отрезок, круг, шар, все пространство E^n и т. п. Условно считают, что пустое множество $\varnothing$ выпукло.

Лемма. *Любое полупространство в* E^n *есть выпуклое множество.*

Действительно, пусть границей полупространства E является гиперплоскость

$$a\cdot x=b, \tag{4}$$

а само полупространство определяется неравенством

$$a\cdot x\leqslant b. \tag{5}$$

Рассмотрим произвольные точки y и z, принадлежащие множеству E, т. е.

$$a\cdot y\leqslant b,\quad a\cdot z\leqslant b, \tag{6}$$

и пусть $t=\alpha y+\beta z$ ($\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$) — произвольная точка отрезка $[y, z]$.

Используя свойства скалярного произведения, на основании неравенств (6) имеем

$$a\cdot t=a(\alpha y+\beta z)=\alpha(a\cdot y)+\beta(a\cdot z)\leqslant\alpha\cdot b+\beta\cdot b=(\alpha+\beta)\,b=b,$$

т. е.

$$a \cdot t \leqslant b. \qquad (7)$$

Таким образом, $t \in E$ и, следовательно, полупространство E выпукло.

Теорема. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть множество выпуклое.*

Доказательство проведем для случая двух выпуклых множеств: для произвольного, конечного или бесконечного, числа выпуклых множеств рассуждения аналогичны.

Пусть A и B — выпуклые множества и $C = A \cap B$ — их пересечение. Если C пусто, то по определению оно выпукло. Пусть C не пусто и x, y — любые две точки, принадлежащие C (возможно, совпадающие). Из смысла пересечения следует, что $x, y \in A$, а также $x, y \in B$. Рассмотрим отрезок $[x, y]$. Так как множества A и B выпуклые, то $[x, y] \subset A$ и $[x, y] \subset B$ и, следовательно, $[x, y] \subset C$. Таким образом, множество C также выпукло.

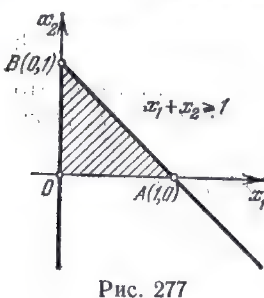


Рис. 277

Следствие. *Пересечение любого числа полупространств есть выпуклое множество (возможно, пустое).*

Замечание. Рассмотрим систему линейных неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

Любой набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющий всем неравенствам (8), называется *решением* этой системы неравенств. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие лишь одному из неравенств системы (8), заполняют полупространство в пространстве E^n. Решения принадлежат пересечению всех этих полупространств. Из теоремы следует, что множество всех решений системы (8) представляет собой выпуклый многогранник (полиэдр). Примерами выпуклых многогранников в трехмерном пространстве могут служить: пирамида; параллелепипед; призма; слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями, и т. п.

Пример. а) Решения системы неравенств

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1$$

в пространстве E^2 заполняют треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ (рис. 277);

б) множество решений системы

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \geqslant 1$$

в пространстве E^2 есть угол, вершиной которого служит точка $B(0, 1)$, а сторонами являются полупрямая BA и полуось Bx_2 (рис. 277).

Определение. *Точка выпуклого множества, которая не является внутренней ни для какого ненулевого отрезка, целиком принадлежащего этому множеству, называется его* ***крайней точкой.***

Например, для отрезка его крайними точками являются концы отрезка; для треугольника — его вершины и т. п.

Интуитивно ясно, что выпуклый многогранник, т. е. пересечение конечного числа полупространств, имеет **конечное** число крайних точек — его вершины.

§ 3. Задача линейного программирования

В последнее время математические методы широко используются в таких вопросах, как планирование народного хозяйства, организация управления промышленностью, планирование военных операций и т. п. С общей точки зрения, задачи управления и планирования обычно сводятся к выбору некоторой системы числовых параметров или функций (характеристики плана), обеспечивающих наиболее эффективное достижение поставленной цели (оптимальный план), с учетом ограниченности возможных ресурсов. Для оценки эффективности плана вводится так называемая целевая функция (т. е. показатель качества плана), выраженная через характеристики плана и принимающая экстремальное значение (т. е. наименьшее или наибольшее значение) для оптимального плана.

Для большого количества практически интересных задач целевая функция выражается линейно через характеристики плана, причем допустимые значения параметров подчинены также линейным равенствам или неравенствам. Нахождение при данных условиях абсолютного экстремума целевой функции носит название *линейного программирования* (более удачным был бы термин «линейное планирование»).

Математически задача линейного программирования формулируется следующим образом: требуется найти абсолютный экстремум (наименьшее или наибольшее значение в зависимости от смысла задачи) линейной функции

$$S=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \quad (c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2\neq 0) \qquad (1)$$

(целевая функция) при условии, что на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наложены ограничения в виде линейных равенств или неравенств:

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_k\geqslant 0\,^{1)} \quad (k\leqslant n) \qquad (2)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i\,^{2)} \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Определение 1. *Максимальная совокупность* Ω *значений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *удовлетворяющих всем неравенствам* (2) *и* (3), *называется областью допустимых значений задачи линейного программирования* (*короче, допустимой областью*).

Допустимая область Ω является областью определения функции S.

Из теоремы предыдущего параграфа следует, что *допустимая область задачи линейного программирования представляет собой выпуклый многогранник* (возможно, являющийся пустым множеством, если система неравенств (1), (3) несовместна).

---

[1]) Неравенство противоположного смысла $x_p\leqslant 0$ сводится к неравенствам типа (2) путем введения новой координаты $x'_p=-x_p$ $(1\leqslant p\leqslant k)$.

[2]) Неравенства противоположного смысла, в результате почленного умножения на -1, сводятся к неравенствам вида (3).

О п р е д е л е н и е 2. *Набор значений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из допустимой области* Ω, *при которых целевая функция* (1) *принимает, по смыслу задачи, или наименьшее или наибольшее значение, называется* ***решением*** *задачи линейного программирования* (*или* ***оптимальным планом***). *В случае существования хотя бы одного решения задача линейного программирования называется* ***разрешимой***.

Теоретически возможны три случая: А) Условия (2), (3) противоречивы и, следовательно, допустимое множество Ω пусто. Задача (1), (2), (3) решения не имеет. Б) Допустимая область Ω неограничена; задача (1), (2), (3) может иметь решение, а может не иметь его. В) Система условий (2), (3) совместна и допустимая область Ω ограничена. В силу теоремы Вейерштрасса (гл. XX, § 11) задача линейного программирования (1), (2), (3) разрешима. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь случая В).

Согласно общей теории (см. гл. XX, §§ 10, 11) целевая функция (1) достигает своего абсолютного экстремума или в критической точке или на границе Γ допустимой области Ω. Так как ее частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

нигде одновременно в нуль не обращаются в области Ω, то целевая функция S достигает своего абсолютного экстремума на границе Γ допустимой области Ω. Этот результат можно уточнить.

Т е о р е м а. *Линейная целевая функция может достигать своего строгого абсолютного экстремума лишь в крайних точках допустимой области.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть

$$S(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}$$

— целевая функция, $\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и Ω — ее допустимая область. Предположим, например, что $S(\boldsymbol{\xi})=M$, где $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}\in\Omega$, есть с т р о г и й м а к с и м у м целевой функции $S(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\xi}$ — некрайняя точка выпуклой области Ω. Тогда существует ненулевой отрезок $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]\subset\Omega$, для которого точка $\boldsymbol{\xi}$ является внутренней, т. е.

$$\boldsymbol{\xi}=\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z}, \tag{4}$$

где $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta=1$, причем, очевидно, $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{z}$. Так как $S(\boldsymbol{\xi})=M$ есть строгий максимум функции $S(\boldsymbol{x})$, то, выбирая отрезок $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ достаточно малым (что, очевидно, можно сделать), будем иметь

$$S(\boldsymbol{y})<M, \quad S(\boldsymbol{z})<M. \tag{5}$$

Из равенства (4), учитывая, что $S(\boldsymbol{x})$ — линейная однородная функция, получаем

$$S(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{c}\cdot(\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{y})+\beta(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{z})=\alpha S(\boldsymbol{y})+\beta S(\boldsymbol{z})<\alpha M+\beta M=M,$$

и мы, таким образом, приходим к противоречию. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В общем случае, можно доказать, что абсолютный экстремум линейной целевой функции $S(\boldsymbol{x})$, если он существует, всегда реализуется в крайних точках выпуклой допустимой области Ω, т. е. в вершинах многогранника Ω (возможно, конечно, что абсолютный экстремум целевой функции достигается также и

в других точках; например, функция $S(x)$ может иметь свое наибольшее значение во всех точках одной из граней многогранника Ω и т. п.)

Таким образом, решение задачи линейного программирования сводится к нахождению конечного числа значений целевой функции и сравнению их между собой.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$S = x_1 + 2x_2$$

в области Ω: $0 \leqslant x_1 \leqslant 20$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 20$, $x_1 - x_2 \leqslant -30$.

Область Ω представляет собой четырехугольник с вершинами $A(20, 0)$, $B(20, 50)$, $C(0, 30)$, $D(0, 10)$ (рис. 278). Имеем

$$S(A) = 20, \quad S(B) = 120, \quad S(C) = 60, \quad S(D) = 20.$$

Следовательно, наименьшее значение функции S в области Ω равно $m = 20$ (достигается в вершинах A и D), а наибольшее ее значение $M = 120$ (достигается в вершине B).

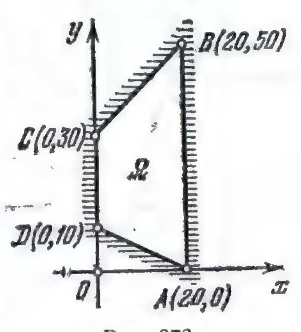


Рис. 278

Этот результат становится геометрически наглядным, если построить линии уровня функции S, т. е. прямые $x_1 + 2x_2 = \text{const}$.

Однако такое легкое решение задачи возможно лишь в самых простых случаях. Использованный здесь «метод перебора», даже при сравнительно небольшом числе переменных n и неравенств m, связан со значительным объемом работы и требует применения быстродействующих вычислительных машин. Поэтому были созданы методы, упорядочивающие перебор вершин допустимой области (симплекс-метод, метод потенциала и др.); для знакомства с ними следует обратиться к специальной литературе.

В заключение приведем две конкретные задачи, решаемые методом линейного программирования.

I. Организация снабжения. Пусть потребляющий центр обеспечивает свое необходимое снабжение некоторым однородным продуктом (например, картофелем) из n пунктов.

Обозначим через x_i количество продуктов (например, в тоннах), закупаемых центром в i-м пункте, а через c_i — цену единицы продукта в этом пункте (включая стоимость перевозки), $i = 1, 2, \ldots, n$. Постоянные c_i различны, так как в одном пункте производится более дешевый продукт, а в другом — более дорогой. Кроме того, пункты удалены на различные расстояния от центра и, следовательно, издержки на транспортные перевозки различны. Тогда расходы центра, при данном плане закупок, составляют

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \tag{6}$$

Если a — потребность центра в данном продукте, то должно быть обеспечено условие

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \tag{7}$$

Кроме того, объем производства продукта в i-м пункте ограничен некоторой величиной b_i. Возможно также, что пропускная способность транспорта, могущего быть использованным для перевозки продукта в центре, лимитируется величиной b_i'. В таком случае на x_i естественно налагаются ограничения:

$$0 \leqslant x_i \leqslant \beta_i, \qquad (8)$$

где $\beta_i = \min(b_i, b_i')$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

При рациональном плане закупок продукта расходы центра должны быть минимальными. Таким образом, мы приходим к задаче линейного программирования: найти наименьшее значение функции расходов (6) при условиях (7) и (8). В данном случае задача имеет простое решение.

II. Транспортная задача. Пусть в пунктах $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_m$ производится некоторый однородный продукт, потребляющими центрами которого являются пункты $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Предположим, что транспортные издержки при перевозе единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j составляют c_{ij} денежных единиц, а количество продуктов (например, в тоннах), перевозимых из A_i в B_j, есть x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$. В таком случае суммарные транспортные издержки будут

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \qquad (9)$$

Объем производства в пунке A_i лимитируется некоторой величиной a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, зависящей от производственной мощности предприятия. Предполагая, что вся продукция идет в пункты потребления, имеем условия

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (10)$$

Кроме того, потребность в продукте для пункта B_j диктуется интересами производства и составляет некоторую определенную величину b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (11)$$

Требуется организовать такой план перевозок, при котором суммарные транспортные издержки S были бы минимальными при условии, что производимый на пунктах A_i продукт используется целиком (условия 10)) и полностью удовлетворена потребность пунктов потребления (условия 11)). Это — типичная задача линейного программирования.

Можно доказать (см. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования.— М.: Наука, 1967), что для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (12)$$

т. е. суммарный объем производства должен быть равен суммарному объему потребления.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ВАЖНЕЙШИЕ ПОСТОЯННЫЕ

$$\pi=3{,}14159, \qquad \pi^{-1}=0{,}31831,$$
$$\pi^2=9{,}86960, \qquad \pi^{-2}=0{,}10132,$$
$$e=2{,}71828, \qquad e^{-1}=0{,}36788,$$
$$e^2=7{,}38906, \qquad e^{-2}=0{,}13534,$$
$$M=\lg e=0{,}43429, \qquad M^{-1}=\ln 10=2{,}30259.$$

Б. СВОДКА ФОРМУЛ

I. Аналитическая геометрия на плоскости

1. *Параллельный перенос* системы координат

$$x'=x-a, \quad y'=y-b,$$

где $O'(a, b)$ — новое начало, (x, y) — старые координаты точки, $[x', y']$ — ее новые координаты.

2. *Поворот системы координат* (при неподвижном начале)

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

где (x, y) — старые координаты точки, $[x', y']$ — ее новые координаты, α — угол поворота.

3. *Расстояние между точками* (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

4. Координаты точки, делящей отрезок с концами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) *в данном отношении* l:

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l}, \quad y=\frac{y_1+ly_2}{1+l}.$$

При $l=1$ имеем координаты *середины отрезка*: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

5. *Площадь треугольника* с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3):

$$S=\pm\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)].$$

6. Уравнение прямой с *угловым коэффициентом*

$$y=kx+b,$$

где $k=\operatorname{tg}\varphi$ (угловой коэффициент) — наклон прямой к оси Ox и b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

7. $\operatorname{tg}\theta=\frac{k'-k}{1+k'k}$ — *тангенс* угла между прямыми с угловыми коэффициентами k и k'. *Условие параллельности* прямых: $k'=k$; *условие перпендикулярности* прямых: $k'=-\frac{1}{k}$.

8. Уравнение прямой, *проходящей через данную точку* (x_1, y_1):

$$y-y_1=k(x-x_1),$$

где k — угловой коэффициент прямой.

9. Уравнение прямой, *проходящей через две точки* (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

10. Уравнение прямой, *отсекающей отрезки* a и b на осях координат:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

11. *Общее уравнение* прямой

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0).$$

12. *Расстояние от точки* (x_1, y_1) *до прямой* $Ax+By+C=0$:

$$\delta=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

13. *Уравнение окружности* с центром (x_0, y_0) и радиусом R:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

14. *Каноническое уравнение эллипса* с полуосями a и b:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Фокусы эллипса $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$, где $c^2=a^2-b^2$.

15. *Фокальные радиусы* точки (x, y) эллипса (1):

$$r=a-\varepsilon x; \quad r'=a+\varepsilon x,$$

где $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ — *эксцентриситет эллипса*.

16. *Каноническое уравнение гиперболы* с полуосями a и b:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Фокусы гиперболы $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$, где $c^2=a^2+b^2$.

17. *Фокальные радиусы* точки (x, y) гиперболы (2):

$$r=\pm(\varepsilon x-a), \quad r'=\pm(\varepsilon x+a),$$

где $\varepsilon=c/a>1$ — *эксцентриситет гиперболы*.

18. *Асимптоты гиперболы* (2):

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

19. *График обратной пропорциональности*

$$xy = c \quad (c \neq 0)$$

— равносторонняя гипербола с асимптотами $x=0$ и $y=0$.

20. *Каноническое уравнение параболы* с параметром p:

$$y^2 = 2px.$$

Фокус параболы: $F(p/2, 0)$; *уравнение директрисы*: $x = -p/2$; *фокальный радиус* точки (x, y) параболы: $r = x + \frac{p}{2}$.

21. *График квадратного трехчлена*

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

— вертикальная парабола с вершиной $O'\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$.

22. *Полярные координаты* точки с прямоугольными координатами x и y:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Прямоугольные координаты точки с полярными координатами ρ и φ:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

23. *Параметрические уравнения окружности* радиуса R с центром в начале координат:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t$$

(t — параметр).

24. *Параметрические уравнения эллипса с полуосями a и b*:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

25. *Параметрические уравнения циклоиды*:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. *Основные теоремы о пределах*:

а) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)-h(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} h(x)$.

б) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

В частности,

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x).$$

в) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) : \lim\limits_{x\to a} g(x) \quad (\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0)$.

2. *Замечательные пределы*:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ldots$

3. *Связь между десятичными и натуральными логарифмами*:

$$\lg x = M\ln x,$$

где $M = \lg e = 0{,}43429\ldots$

4. *Приращение функции* $y=f(x)$, соответствующее приращению Δx аргумента x:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

5. *Условие непрерывности* функции $y=f(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Основное свойство непрерывной функции

$$\lim_{x\to x_1} f(x)=f(\lim_{x\to x_1} x).$$

6. *Производная*

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Геометрически $y'=f'(x)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x.

Правила нахождения производных и сводка формул для производных см. гл. X, § 13.

7. *Теорема Лагранжа* о конечном приращении дифференцируемой функции

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

где $\xi\in(x_1, x_2)$.

8. Функция $y=f(x)$ *возрастает*, если $f'(x)>0$, и *убывает*, если $f'(x)<0$.

9. Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

если предел справа существует.

10. *Локальная формула Тейлора*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

где $f^{(n)}(x)$ существует в некоторой полной окрестности точки x_0.

11. а) *Необходимое условие экстремума функции* $f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

б) *Достаточные условия экстремума функции* $f(x)$ в точке x_0:

1) $f'(x_0)=0$, $f'(x_0-h_1)f'(x_0+h_2)<0$ при любых достаточно малых $h_1>0$ и $h_2>0$, или

2) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.

12. а) График функции $y=f(x)$ *вогнут вверх*, если $f''(x)>0$, и *вогнут вниз*, если $f''(x)<0$.

б) *Необходимое условие точки перегиба* графика функции $y=f(x)$ при $x=x_0$: $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие точки перегиба при $x=x_0$:

$$f''(x_0)=0,\ f''(x_0-h_1)f''(x_0+h_2)<0$$

при любых достаточно малых $h_1>0$ и $h_2>0$.

13. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $f(\alpha)f(\beta)<0$, то корень ξ уравнения $f(x)=0$ приближенно может быть найден по формулам:

а) $\xi_1=\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}(\beta-\alpha)$ (*метод хорд*);

б) $\overline{\xi}_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, где $f''(\alpha)\neq 0$, $f(\alpha)f''(\alpha)>0$ (*метод касательных*).

14. *Дифференциал независимой переменной* x: $dx=\Delta x$. *Дифференциал функции* $y=f(x)$: $dy=y'\,dx$. Связь приращения Δy функции с дифференциалом dy функции:

$$\Delta y=dy+\alpha\Delta x,$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Основные свойства дифференциалов и формулы дифференциалов см. гл. XII, § 7.

15. *Малое приращение* дифференцируемой функции

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x.$$

16. *Дифференциал второго порядка* функции $y=f(x)$, где x — независимая переменная ($d^2x=0$):

$$d^2y=y''dx^2.$$

III. Интегральное исчисление

1. Если $dy=f(x)\,dx$, то

$$y=\int f(x)\,dx$$

(*неопределенный интеграл*).

2. *Основные свойства неопределенного интеграла:*

а) $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$, $\left[\int f(x)\,dx\right]'=f(x)$;

б) $\int dF(x)=F(x)+C$; в) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx$ $(A\neq 0)$;

г) $\int[f(x)+g(x)-h(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx$.

Таблица простейших неопределенных интегралов см. гл. XIII, § 3.

3. *Основные методы интегрирования.*

а) *Метод разложения*:

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx,$$

где $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

б) *Метод подстановки*: если $x=\varphi(t)$, то

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

в) *Метод интегрирования по частям*:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

4. *Формула Ньютона—Лейбница*: если $f(x)$ непрерывна и $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

5. *Определенный интеграл* как предел интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})\,\Delta x_i,$$

где $\overline{x}_i \in [x_i,\ x_{i+1}]$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

6. *Основные свойства определенного интеграла* (рассматриваемые функции непрерывны):

а) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$; б) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

в) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; г) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

д) $\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$; е) $\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx =$

$= \int_a^b f(x)\,dt + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx$;

ж) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dx = f(x)$, $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$.

7. *Теорема о среднем*: если $f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c),$$

где $a < c < b$.

8. *Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

9. *Формула замены переменной в определенном интеграле*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

10. *Формула трапеций*:

$$\int_a^b y\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ и $x_n = b$, $y = f(x)$, $y_i = f(x_0 + ih)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$.

11. *Формула Симпсона*

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}\left[y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right],$$

где $h = \frac{1}{2}(b-a)$.

12. *Несобственный интеграл*:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

13. *Площадь криволинейной трапеции*, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, осью Ox и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$:

$$S = \int_a^b y\,dx.$$

14. *Площадь сектора*, ограниченного непрерывной линией $\rho = f(\varphi)$ (ρ и φ — полярные координаты) и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi.$$

15. *Длина дуги* гладкой кривой $y = f(x)$ *в прямоугольных координатах* x и y от точки $x = a$ до точки $x = b$ $(a < b)$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

16. *Длина дуги* гладкой кривой $\rho = f(\varphi)$ *в полярных координатах* ρ и φ от точки $\varphi = \alpha$ до точки $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

17. *Длина дуги* гладкой кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *заданной параметрически* $(t_0 < T)$:

$$l = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

18. *Объем тела* с известным поперечным сечением $S(x)$:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

19. *Объем тела вращения*:

а) вокруг оси Ox: $\quad V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx \quad (a < b);$

б) вокруг оси Oy: $V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy \quad (c < d)$.

20. *Работа переменной силы* $F = F(x)$ на участке $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

IV. Комплексные числа, определители и системы уравнений

1. *Комплексное число* $z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ — действительные числа и $i^2 = -1$. *Модуль комплексного числа*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

Равенство комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

2. *Сопряженное число для комплексного числа* $z = x + iy$:

$$\bar{z} = x - iy.$$

3. *Арифметические действия над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

а) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

б) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

в) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0).$

В частности,

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad |z|^2 = z\bar{z}.$$

4. *Тригонометрическая форма комплексного числа*:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

5. *Теоремы о модуле и аргументе*:

а) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; б) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$;

в) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \quad (z_2 \neq 0)$;

г) $|z^n| = |z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z \quad (n$ — целое).

6. *Корень из комплексного числа*:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

7. *Показательная форма комплексного числа*:

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

8. *Определитель второго порядка*:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

9. *Решение системы*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\}$$

дается формулами

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D} \quad \text{(правило Крамера)},$$

где

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

10. *Решения однородной системы*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{array}\right\}$$

даются формулами

$$x=D_1t, \quad y=-D_2t, \quad z=D_3t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

где

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

— миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}.$$

11. *Определитель третьего порядка*:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1,$$

где

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

— алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя.

12. *Решение системы*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{array}\right\}$$

дается *формулами Крамера*

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D}, \qquad z=\frac{D_z}{D},$$

где

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

13. Решения однородной системы

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{aligned}\right\}$$

если

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0, \qquad \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

находятся из подсистемы (см. 10)

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{aligned}\right\}$$

V. Элементы векторной алгебры

1. Сумма векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ есть вектор $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, являющийся замыкающим векторной линии со звеньями $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2. Разность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть вектор $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, где $-\boldsymbol{b}$ есть вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{b}$.

3. *Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр k* есть вектор $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ такой, что $\boldsymbol{b}=|k|\boldsymbol{a}$, где $a=|\boldsymbol{a}|$ и $b=|\boldsymbol{b}|$, причем направление вектора $\boldsymbol{b}$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если $k>0$, и противоположно ему, если $k<0$.

4. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны*, если $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ (k — скаляр).

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны*, если $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ (k, l — скаляры).

5. *Скалярное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть скаляр

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\varphi,$$

где $\varphi=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *ортогональны*, если $\boldsymbol{ab}=0$.

Если $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\boldsymbol{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

6. *Векторное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть вектор

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ и $c=ab\sin\varphi$ ($\varphi=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$), причем $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая тройка.

Если $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по соответствующим осям координат.

7. *Смешанное произведение*

$$abc=(a\times b)\cdot c$$

представляет собой объем (со знаком) параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c.

Если $a=\{a_x, a_y, a_z\}$, $b=\{b_x, b_y, b_z\}$, $c=\{c_x, c_y, c_z\}$, то

$$abc=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

VI. Аналитическая геометрия в пространстве

1. *Декартовы прямоугольные координаты точки* $M(x, y, z)$ пространства $Oxyz$ есть

$$x=r_x, \quad y=r_y, \quad z=r_z,$$

где $r=\overline{OM}$ — радиус-вектор точки M.

2. *Длина и направление вектора* $a=\{a_x, a_y, a_z\}$ определяются формулами

$$a=|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta=\frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a} \quad (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы* вектора a.

3. *Расстояние между двумя точками* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

4. *Уравнение плоскости* с нормальным вектором $N=\{A, B, C\}\neq 0$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, есть

$$N\cdot(r-r_0)=0, \qquad (1)$$

где r — радиус-вектор текущей точки плоскости $M(x, y, z)$ и r_0 — радиус-вектор точки M_0.

В координатах уравнение (1) имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

или

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2)$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ (*общее уравнение плоскости*).

5. *Расстояние от точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* (2) равно

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

6. *Векторное уравнение прямой линии в пространстве*:

$$r=r_0+st, \qquad (3)$$

где $r=\{x, y, z\}$ — текущий радиус-вектор прямой, $r_0=\{x_0, y_0, z_0\}$ — радиус-вектор фиксированной точки прямой, $s=\{m, n, p\}\neq 0$ — направляющий вектор прямой и t — параметр $(-\infty<t<+\infty)$.

В координатной форме уравнение прямой (3) имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

7. *Прямая линия как пересечение плоскостей* задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Направляющий вектор прямой (4) есть $\mathbf{s}=\mathbf{N}\times\mathbf{N}'$, где $\mathbf{N}=\{A, B, C\}$, $\mathbf{N}'=\{A', B', C'\}$.

8. *Уравнение сферы* радиуса R с центром (x_0, y_0, z_0):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

9. *Уравнение трехосного эллипсоида* с полуосями a, b и c:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

10. *Уравнение параболоида вращения* вокруг оси Oz:

$$x^2+y^2=2pz.$$

VII. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

1. *Условие непрерывности функции* $z=f(x, y)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)]=0$$

или

$$\lim_{\substack{x_1\to x\\ y_1\to y}} f(x_1, y_1)=f(x, y).$$

Аналогично определяется непрерывность функции $u=f(x, y, z)$.

2. *Частные производные функции* $z=f(x, y)$ по переменным x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}.$$

3. *Полный дифференциал функции* $z=f(x, y)$ от независимых переменных x и y:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$.

Если $u=f(x, y, z)$, то

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

4. *Малое приращение дифференцируемой функции*

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

5. *Производная функции* $u=f(x, y)$ *по направлению* $\mathbf{l}$, заданному единичным вектором $\{\cos\alpha, \cos\beta\}$, равна

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

Аналогично, если $u=f(x, y, z)$ и $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор направления l, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

6. *Точки экстремума* (точнее — точки возможного экстремума) дифференцируемой функции $u=f(x, y, z)$ определяются из уравнений:

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0.$$

7. *Градиент скалярного поля* $u=f(x, y, z)$ есть вектор

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Отсюда

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

8. Если $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ есть полный дифференциал в области G, то

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad ((x, y)\in G)$$

(*признак полного дифференциала*).

VIII. Ряды

1. *Основное определение*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n.$$

2. *Необходимый признак сходимости ряда*: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

3. *Геометрическая прогрессия*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}, \quad \text{если} \quad |q|<1.$$

4. *Гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

(расходится).

5. *Признак Даламбера*. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n>0)$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тогда: а) если $l<1$, то ряд сходится; б) если $l>1$, то ряд расходится и $u_n\not\to 0$.

6. *Абсолютная сходимость.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится (*абсолютно*).

7. *Признак Лейбница.* Если $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$ и $v_n \to 0$ при $n \to \infty$, то знакочередующийся ряд

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$$

сходится.

8. *Радиус сходимости* степенного ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

определяется по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если последняя имеет смысл.

9. *Ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

10. *Разложение в степенные ряды* основных функций:

а) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (|x| < 1)$;

б) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$
$(-1 < x \leqslant 1)$;

в) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$
$(|x| \leqslant 1)$;

г) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (|x| < +\infty)$;

д) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$
$(|x| < +\infty)$;

е) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$
$(|x| < +\infty)$;

ж) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \ldots n}x^n + \ldots \quad (|x| < 1).$$

11. *Ряд Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

12. *Ряды в комплексной области*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + iv_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + i\sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

13. *Абсолютная сходимость рядов с комплексными членами.* Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n+iv_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+iv_n)$ также сходится (абсолютно).

14. *Формулы Эйлера:*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

15. *Тригонометрический ряд Фурье* кусочно гладкой функции $f(x)$ периода $2l$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right), \qquad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(коэффициенты Фурье функции $f(x)$).

Для функции $f(x)$ периода 2π получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left\{ \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix} \right. dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда (1) равна

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)].$$

16. Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ *четная*, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ *нечетная*, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

IX. Дифференциальные уравнения

1. *Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными*

$$X(x)\, Y(y)\, dx + X_1(x)\, Y_1(y)\, dy = 0$$

имеет *общий интеграл*

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\, dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\, dy = C. \tag{1}$$

Особые решения, не входящие в интеграл (1), определяются из уравнений $X_1(x) = 0$ и $Y(y) = 0$.

2. *Однородное дифференциальное уравнение* первого порядка

$$P(x,\ y)\, dx + Q(x,\ y)\, dy = 0,$$

где $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ — однородные непрерывные функции одинаковой степени, решается с помощью подстановки

$$y = ux$$

(u — новая функция).

3. *Линейное дифференциальное уравнение* первого порядка

$$a(x)\, y' + b(x)\, y + c(x) = 0$$

может быть решено с помощью подстановки

$$y = uv,$$

где u — ненулевое решение однородного уравнения $a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$, а v — новая функция.

4. *Интегрируемые случаи* дифференциального уравнения второго порядка:

а) если

$$y'' = f(x),$$

то общее решение

$$y = \int dx \int f(x)\, dx + C_1 x + C_2;$$

б) если

$$y'' = f(y),$$

то *общий интеграл*

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y)\, dy + C_1}} = \pm (x + C_2);$$

в) если

$$y'' = f(y'),$$

то *общий интеграл* уравнения может быть найден из соотношения

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1,$$

где $y' = p$.

5. *Случаи понижения порядка* для дифференциального уравнения второго порядка:

а) если

$$y''=f(x,\ y'),$$

то, полагая $y'=p(x)$, получим

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p);$$

б) если

$$y''=f(y,\ y'),$$

то, полагая $y'=p(y)$, будем иметь

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p).$$

6. *Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения* второго порядка

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$$

имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

где y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения.

7. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* второго порядка

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x)$$

имеет вид

$$y=\overline{y}+z,$$

где $\overline{y}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения и z — частное решение данного неоднородного уравнения.

8. Таблица 1

Общий вид решений однородного уравнения $y''+py'+qy=0$ (p и q постоянны) в зависимости от корней характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$

№ п/п	Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	Вид общего решения
I	Корни k_1 и k_2 действительные и различные	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
II	Корни равные: $k_1=k_2$	$y=(C_1+C_2x)\,e^{k_1x}$
III	Корни комплексные: $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

9. **Таблица 2**

Характер частного решения z неоднородного уравнения $y''+py'+qy=f(x)$ (p и q постоянны) в зависимости от правой части $f(x)$

№ п/п	Правая часть $f(x)$	Случаи	Частное решение
I	$f(x)=ae^{mx}$ (a, m постоянны)	1) $m^2+pm+q\neq 0$, 2) $m^2+pm+q=0$: а) $p^2-4q>0$, б) $p^2-4q=0$	$z=Ae^{mx}$, $z=Axe^{mx}$, $z=Ax^2e^{mx}$
II	$f(x)=M\cos\omega x+$ $+N\sin\omega x$ (M, N, ω постоянны; $\omega\neq 0$)	1) $p^2+(q-\omega^2)^2\neq 0$, 2) $p=0$, $q=\omega^2$	$z=A\cos\omega x+$ $+B\sin\omega x$, $z=x(A\cos\omega x+$ $+B\sin\omega x)$
III	$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c постоянны)	1) $q\neq 0$, 2) $q=0$, $p\neq 0$	$z=Ax^2+Bx+C$, $z=x(Ax^2+Bx+C)$

A, B, C — постоянные неопределенные коэффициенты.

X. Криволинейные интегралы

1. *Криволинейный интеграл первого рода* от непрерывной функции $f(x, y)$, взятый по кусочно гладкой кривой K: $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($t\in[\alpha, \beta]$), равен

$$\int_K f(x;\ y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,|dt|. \qquad (1)$$

Если кривая K задана уравнением $y=y(x)$ ($a\leqslant x\leqslant b$), то

$$\int_K f(x,\ y)\,ds=\int_a^b f(x,\ y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл первого рода для случая пространственной кривой K.

Если $f(x, y)$ есть линейная плотность линии K, то интеграл (1) представляет массу линии K.

2. *Криволинейный интеграл второго рода* от пары непрерывных функций $X(x, y)$, $Y(x, y)$, взятый по кусочно гладкому пути K: $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($t\in[\alpha, \beta]$), определяется формулой

$$\int_K X(x,\ y)\,dx+Y(x,\ y)\,dy=$$

$$=\int_\alpha^\beta [X(x(t),\ y(t))\,x'(t)+Y(x(t),\ y(t))\,y'(t)]\,dt. \qquad (2)$$

Если путь K задан уравнением $y=y(x)$ $(x\in[a, b])$, то

$$\int\limits_K X(x, y)\,dx+Y(x, y)\,dy=\int\limits_a^b [X(x, y(x))+Y(x, y(x))\,y'(x)]\,dx.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода для пространственной кривой K.

Физически интеграл (2) представляет собой работу переменной силы $F=\{X(x, y),\ Y(x, y)\}$ вдоль пути K.

3. Если выполнено условие

$$X(x, y)\,dx+Y(x, y)\,dy=dU(x, y),$$

то интеграл (2) не зависит от пути интегрирования K и

$$\int\limits_K X(x, y)\,dx+Y(x, y)\,dy=U(x, y)\Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}=U(x_2, y_2)-U(x_1, y_1), \quad (3)$$

где (x_1, y_1) — начальная точка пути и (x_2, y_2) — конечная точка пути.

Физически интеграл (3) представляет собой работу силы, имеющей потенциал $U(x, y)$.

XI. Двойные и тройные интегралы

1. *Двойным интегралом* от функции $f(x, y)$, распространенным на область S, называется число

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dS=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i; \quad (1)$$

где $(x_i, y_i)\in\Delta S_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и d — наибольший диаметр ячеек ΔS_i.

Если $f(x, y)\geqslant 0$, то геометрически интеграл (1) представляет собой объем прямого цилиндроида, построенного на основании S и ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$.

2. Если область интегрирования S стандартна относительно оси Oy и определяется неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$, $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — непрерывные функции, то *двойной интеграл в прямоугольных декартовых координатах* от непрерывной функции $f(x, y)$ выражается формулой

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

3. *Двойной интеграл в полярных координатах* φ и r, где

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi,$$

имеет вид

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dS=\iint\limits_S f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Если область интегрирования S определяется неравенствами $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, $r_1(\varphi)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi)$, то

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dS=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr.$$

4. Если $\rho=\rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки S, то ее *масса* есть

$$m=\iint_S \rho(x, y)\,dS=\iint_S \rho\,dx\,dy \tag{2}$$

(*физический смысл двойного интеграла*). В частности, при $\rho=1$ получаем формулу *площади пластинки*

$$S=\iint_S dS=\iint_S dx\,dy.$$

5. *Статические моменты пластинки* S относительно координатных осей Ox и Oy выражаются интегралами

$$S_x=\iint_S \rho y\,dS, \quad S_y=\iint_S \rho x\,dS,$$

где $\rho=\rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки S.

6. *Координаты центра масс пластинки* S определяются формулами

$$x_0=\frac{S_y}{m}, \quad y_0=\frac{S_x}{m}, \tag{3}$$

где m — масса пластинки (см. (2)).

Для однородной пластинки в формулах (2) и (3) можно положить $\rho=1$.

7. *Моменты инерции пластинки* S относительно координатных осей Ox и Oy выражаются интегралами

$$I_x=\iint_S \rho y^2\,dS, \quad I_y=\iint_S \rho x^2\,dS,$$

где $\rho=\rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки.

8. *Тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V, называется число

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i, \tag{4}$$

где $(x_i, y_i, z_i)\in\Delta V_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и d — наибольший диаметр ячеек ΔV_i.

Если $f(x, y, z)$ есть плотность в точке (x, y, z), то тройной интеграл (4) представляет собой массу, заполняющую объем V.

9. *Объем* тела V равен

$$V=\iiint_V dV=\iiint_V dx\,dy\,dz.$$

10. Если область интегрирования V определяется неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$, $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y)$, где $y_i(x)$, $z_i(x, y)$ $(i=1, 2)$ — непрерывные функции, то *тройной интеграл в прямоугольных координатах* от непрерывной функции $f(x, y, z)$ может быть вычислен по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

XII. Теория вероятностей

1. Под *суммой* двух событий A и B:

$$A+B=A\cup B,$$

понимается событие, которое имеет место тогда и только тогда, когда осуществляется хотя бы одно из событий A и B.

2. Под *произведением* двух событий A и B:

$$AB=A\cap B,$$

понимается событие, которое имеет место тогда и только тогда, когда происходит как событие A, так и событие B.

3. *Вероятность* (в классическом смысле) *события* A

$$P(A)=\frac{m}{n} \quad (0\leqslant P(A)\leqslant 1)$$

— отношение числа m благоприятных для события A равновозможных элементарных исходов к числу n всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов.

4. *Вероятность противоположного события*:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

5. *Теорема сложения* для двух несовместных событий A и B:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

В общем случае

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

6. *Теорема умножения* вероятностей:

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B),$$

где $P_A(B)$ — соответствующая условная вероятность события B.

Если события A и B независимы, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

7. *Формула полной вероятности*:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P_{H_i}(A),$$

где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа гипотез:

$$A=\sum_{i=1}^{n} H_iA, \quad H_iH_j=O \quad \text{при} \quad i\neq j, \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1.$$

8. *Формула Бейеса*:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\,P_{H_j}(A)}$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$, где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа гипотез.

9. *Основные формулы комбинаторики*: а) *число размещений* из n элементов по m:

$$A_n^m=n(n-1)\ldots[n-(m-1)]=\frac{n!}{(n-m)!};$$

б) *число перестановок* из n элементов: $A_n^n = n!$;

в) *число сочетаний* из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

10. *Формула бинома Ньютона*:

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + p^n.$$

11. *Биномиальный закон распределения*: в условиях схемы Бернулли вероятность появления события A при n испытаниях точно m раз $(0 \leqslant m \leqslant n)$ равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q = 1 - p$ при однократном испытании.

12. *Локальная формула Лапласа*:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-t^2/2}$$

(см. п. 11), где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $t = (npq)^{-1/2}(m - np)$.

13. *Интегральная формула Лапласа*:

$$P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}),$$

где

$$t_m = (npq)^{-1/2}(m - np), \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt.$$

14. *Формула Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu},$$

где $\mu = np$, причем вероятность p мала.

15. *Математическое ожидание* дискретной случайной величины $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $p_i = P(X = x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, есть

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Основные свойства:

1) $M(C) = C$;

2) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

3) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$;

4) $M(CX) = CM(X)$;

5) $M(XY) = M(X)\, M(Y)$

(X и Y независимы).

16. *Дисперсия* дискретной случайной величины X:

$$D = M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Основные свойства:

1) $$D(C)=0;$$

2) $$D(X \pm Y)=D(X)+D(Y) \quad (X \text{ и } Y \text{ независимы});$$

3) $$D(CX)=C^2 D(X).$$

17. Для биномиального закона распределений числа появлений X события A при n испытаниях имеем:

1) $$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $p=P(A)$, $q=P(\overline{A})$;

2) $$M(X)=np;$$

3) $$D(X)=npq.$$

18. Для непрерывной случайной величины X имеем

а) *функцию распределения*

$$\Phi(x)=P(-\infty < X < x)=\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$(-\infty < x < +\infty)$, где $\varphi(x)$ — плотность вероятности;

б) *математическое ожидание*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx;$$

в) *дисперсию*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} [x-M(X)]^2\,\varphi(x)\,dx.$$

19. *Для нормального закона распределения* случайной величины X плотность вероятности имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2},$$

где $x_0=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

В этом случае

$$P(a \leqslant x \leqslant b)=\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ (см. п. 13) — стандартный интеграл вероятностей.

ОТВЕТЫ

Глава I

2. (0, 0), (10, 0), $(5, 5\sqrt{3})$. 3. а) $M(1, -2)$; б) $M(-1, 2)$; в) $M(2, 1)$; г) $M(-2, -1)$. 4. $A_1(8, 4)$; $B_1(11, 3)$. 5. $x_1=6$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=0$. 6. $C\left(2\frac{4}{5}, 6\frac{1}{5}\right)$. 7. $B(4, 5)$. 8. $\frac{10}{3}\sqrt{2}$. 9. (4, 3). 10. $N\left(1\frac{1}{3}, 1\right)$. 11. $x_i=x_0+ih$, $y_i=y_0+ik$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, где $h=\frac{x-x_0}{n}$ и $k=\frac{y-y_0}{n}$. 12. 12. 14. $y_1=10$; $y_2=-5$. 15. $15\frac{1}{2}$ га.

Глава II

1. $y=2x$ и $y=-2x$. 2. $5x+y+2=0$. 3. Окружность: $x^2+y^2=4$. 4. а) Совокупность осей координат; б) начало координат (0, 0); в) пара прямых, параллельных оси Oy, лежащих по обе стороны ее и отстоящих от нее на расстоянии, равном единице; г) пара прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояниях, равных 1 и 2; д) совокупность биссектрисы I и III координатных углов и оси Oy.

6. Точки A и B лежат на кривой; точки C, D и E не лежат на кривой.

7. (0, 2); (—1, 0); (2, 0). 8. (2, 2) и (—2, —2).

Глава III

2. $y=0$; $y=2\sqrt{3}$; $y=\sqrt{3}(x+5)$; $y=-\sqrt{3}(x-5)$. 3. $x-3y+9=0$, $3x+y-13=0$. 4. $12x+8y-15=0$. 5. $x+2y=0$. 6. $7x-2y-1=0$; $\sqrt{53}$. 7. $7x+8y-11=0$; $\frac{71}{\sqrt{113}}$. 8. $6x+5y-56=0$. 9. $x+y-7=0$. 10. $y=0{,}1\,x-5$; 25 м; 150 м. 11. а) $x=305$, $y=215$; б) точки пересечения нет — прямые параллельны; в) $x=t$, $y=2t$, где t произвольно, — прямые сливаются. 12. $y=x$. 13. (—4, 0). 14. $x=\frac{ak_2}{k_2-k_1}$, $y=\frac{ak_1k_2}{k_2-k_1}$, где $k_1=\operatorname{tg}\alpha$ и $k_2=\operatorname{tg}\beta$. 15. $\left(1\frac{1}{3}, 1\right)$. 16. 13. 17. 2; 1; 0. 18. 6,4. 19. 7. 20. $8x-6y-15=0$, $8x-6y+25=0$. 21. $y=\frac{3}{4}x$ и $y=\frac{7}{24}x$.

Глава IV

1. а) $C(-4, 0)$; $R=5$; б) $x^2+y^2=2x$; в) $x^2+y^2-x-y+\frac{1}{4}=0$; г) $x^2+y^2-4x-8y+7=0$. 2. $5x-7y+13=0$; $\frac{1}{2}\sqrt{74}$. 3. $x-y-1=0$.

4. $a=2\sqrt{2}$, $b=2$, $c=2$, $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$, $\varepsilon=1/\sqrt{2}$.
5. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. 6. 4. 7. а) $a=2$, $b=3/2$, $c=5/2$, $F\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$, $F'\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$, $\varepsilon=1{,}25$; б) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.
8. $150/\sqrt{481}$. 9. 5/3; 5/4. 10. $F_1F_2=5\sqrt{2}$. 11. $\pm x\pm y=10$. 12. 5/3.
13. $y^2=20x$. 14. (0, 1); $y=-1$. 15. 7,5 см от вершины. 16. 24.
17. $y=1+\frac{x^2}{4}$. 18. $y_1=2x_1^2$, $x_1=x-2$, $y_1=y+3$; $O_1(2, -3)$.
19. $y_1=-x_1^2$, $x_1=x-2$, $y_1=y-1$; $O_1(2, 1)$. 20. $y_1^2=x_1$, $x_1=x-\frac{7}{4}$, $y_1=y-\frac{1}{2}$; $O_1\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$. 21. $h_1=9$ м.

Глава V

2. $A(5, 0)$; $B(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $C(0, 2)$; $D(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.
4. а) $\rho=\sec\varphi$; б) $\rho=-2\operatorname{cosec}\varphi$; в) $\varphi=\pi/4$ и $\varphi=5\pi/4$; г) $\varphi=\operatorname{arctg}2$ и $\varphi=\pi+\operatorname{arctg}2$; д) $\rho=\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; е) $\rho=5$. 5. $\rho=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$.
6. $x^2+y^2=ax$; окружность с центром в точке $C(a/2, 0)$ и радиуса $R=|a|/2$. 7. $y^2=2x+1$ (парабола). 8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс),
9. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гипербола). 10. $y^2=16x$ (парабола). 11. 505; (—305; —405).

Глава VI

1. $y=bx\left(1-\frac{x}{2h}\right)$ $(0\leqslant x\leqslant h)$. 2. а) $x\geqslant 2$; б) $|x|\geqslant 1$; в) $0<x<1$; г) $x>-1$. 3. $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=2$, $f(-x)=$ $=x^2+3x+2$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-3x+2x^2}{x^2}$, $f(x+1)=x^2-x$. 4. $-1{,}25$.
5. $y=2x-10$. 6. $f(x)=x^2+2x-3$. 7. $\varphi[\psi(x)]=2^{2x}$; $\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$.
8. $f[f(x)]=1-\frac{1}{x}$; $f\{f[f(x)]\}=x$. 9. а) $x=\frac{y-3}{2}$; б) $x=\sqrt[3]{1-y^3}$, $x=2\operatorname{Arcsin}y$. 11. $x_1=-1{,}88$; $x_2=0{,}35$; $x_3=1{,}53$. 12. 4,49.
13. 1,8796; 0,6928.

Глава VII

1. а) $-3<x<-1$; б) $-\infty<x\leqslant 0$, $6\leqslant x<+\infty$; в) $1/2<x<1$, $1<x<1\frac{1}{2}$; г) $-2\leqslant x\leqslant -1$, $1\leqslant x\leqslant 2$. 2. $\approx 0{,}4\%$. 3. Две.
4. а) 0; б) 1; в) $-1/2$. 5. а) 1/6; б) 1/12. 6. 0. 7. 5. 8. 1/2. 9. $\cos a$.
10. 2. 11. $\lim\limits_{a\to 0} x_1=-c/b$; $\lim\limits_{a\to 0} x_2=\infty$. 13. 1. 14. 0. 15. e^{-1}. 16. e^3.
17. e^{-2}. 18. e^{-1}.

Глава VIII

1. $\Delta x=90$; $\Delta y=1$. 5. $-1, -2, -3$. 6. $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 7. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 8. 3. 9. 1/4. 10. 2. 11. а) $x=0$ — точка разрыва первого рода; б) $x=1$ — точка разрыва первого рода; в) $x=0$ — точка разрыва второго рода.

Глава X

1. а) $y'=6x-1$; б) $f'(x)=-2/x^3$, $f'(1)=-2$, $f'(-10)=0{,}002$. 2. $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $y'=x-\frac{4}{x^3}$. 4. $y'=\frac{a}{a+b}$. 5. $y'=6x^2-2x$. 6. $y'=(3x+1)/2\sqrt{x}$. 7. $y'=x^2\cos x+2x\sin x$. 8. $y'=-2x/(1+x^2)^2$. 9. $y'=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$. 10. $y'=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$. 11. $y'=\sin 2x$. 12. $y'=2x\cos x^2$. 13. $y'=-\frac{3}{4}\sin x\cos\frac{x}{2}$. 14. $y'=-\frac{3}{2}x^2\sin\frac{x^3}{2}$. 15. $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 16. $y'=\frac{1}{x\ln x}$. 17. $y'=\frac{2\ln x}{x}$. 18. $y'=\frac{2}{x}$. 19. $y'=\frac{1}{\sin x}$. 20. $y'=nx^{n-1}+n^x\ln n$. 21. $y'=-2xe^{-x^2}$. 22. $y'=\frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}$. 23. $y'=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 24. $y'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, если $|x|>1$. 25. $y'=-\frac{1}{x^2+1}$. 26. $y'=-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$. 27. $y'=\frac{x^2}{1+x^2}$. 28. $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 29. $y'=\sqrt{1-x^2}$. 30. $y'=\frac{1}{1-x^4}$. 31. $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. 32. $y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}$. 33. а) $y'=\frac{y}{y-1}$; б) $y'=-3$. 34. а) $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; б) $y'_x=\frac{1+\alpha t}{\omega}e^{\alpha t}$; в) $y'_x=-1$. 35. а) $y''=(4x^2-2)e^{-x^2}$; б) $y''=-4\sin 2x$. 36. $y'=-1/x^2$. 37. $y''=(x^2-4x+2)e^{-x}$. 38. $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-9$. 39. а) $y=12x-16$; б) $y=\pi-x$; в) $x-4y+8=0$. 40. $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. 41. $y=\frac{\sqrt{3}}{5}(20-x)$. 42. а) $y=-x$; б) $4x+y-36=0$; в) $4x+3y=0$. 43. 40π м²/с. 44. $\approx 0{,}8$ м/с. 45. $v=\alpha+\beta t$, $j=\beta$. 46. $v=1-\cos t$; $j=\sin t$.

Глава XI

3. $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$. 4. $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. 5. $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. 5.1. $\frac{1}{6}$. 5.2. $\ln\frac{3}{2}$. 5.3. $\frac{1}{3}$. 5.4. $\frac{2}{\pi}$. 5.5. 0. 5.6. 0. 5.7. $\frac{2}{\pi}$. 5.8. 2. 5.9. 1/2. 5.10. 1. 5.11. $1/e$. 5.12. 1. 6. $x=a/2$, $y=a^2/4$ (макс.). 7. $x=1$, $y=1/3$ (макс.); $x=3$, $y=-1$ (миним.). 8. $x=1$, $y=1$ (макс.); $x=-1$, $y=-1$ (миним.). 9. $x=1/2$, $y=3/2$ (макс.). 10. $x=1/2$, $y=1/2e$ (макс.). 11. Стороны прямоугольника: $a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{2}/2$. 12. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. 13. Высота конуса равна $4a/3$. 14. $a/6$, $2a/3$, $2a/3$. 15. $x=1/3$, $y=2/27$.

16. Область определения: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$. Функция нечетная. Точек разрыва нет. Точки пересечения с осями координат: $(-\sqrt{3},\ 0)$ $(0,\ 0)$ и $(\sqrt{3},\ 0)$. Точки экстремума: $y_{\min} = -2$ при $x = -1$ и $y_{\max} = 2$ при $x = 1$. Точка перегиба $(0,\ 0)$.

17. Область определения: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Функция неотрицательная. Точек разрыва нет. Нули функции: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Точки экстремума: $y_{\min} = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$; $y_{\max} = 1$ при $x = 1$. Точки перегиба: $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{4}{9}\right)$ и $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{4}{9}\right)$.

18. Область определения: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$. Функция четная. Точек разрыва нет. Нуль функции $x = 0$. Точка экстремума: $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Точки перегиба $(\mp 1/\sqrt{3},\ 1/4)$.

19. Область определения: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Функция нечетная. Точка разрыва $x = 0$. Нулей нет; функция отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$. Точки экстремума: $y_{\max} = -2$ при $x = -1$ и $y_{\min} = 2$ при $x = 1$. Точек перегиба нет; вогнутость вниз при $x < 0$ и вогнутость вверх при $x > 0$.

20. Область определения: $-\infty < x < -1$ и $-1 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$. $\lim\limits_{x \to -1-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$. Точка разрыва $x = -1$. Нуль функции $x = 0$. Точек экстремума нет; функция возрастает в промежутках $(-\infty,\ -1)$ и $(-1,\ +\infty)$. Точек перегиба нет; вогнутость вверх при $x < -1$ и вогнутость вниз при $x > -1$.

21. Область определения: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$ и $2 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x \to -2-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$. Функция четная. Точки разрыва: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Точка экстремума $y_{\min} = 2$ при $x = 0$. Точек перегиба нет; вогнутость вниз при $x < -2$ и $x > 2$; вогнутость вверх при $-2 < x < 2$.

22. Область определения: $-\infty < x \leqslant 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $y(1) = 0$. Точек разрыва нет. Нули функции: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$; функция отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$. Точек разрыва нет. Точки экстремума $y_{\max} = 2\sqrt{3}/9 \approx 0{,}38$ при $x = 2/3$ и $y_{\min} = 0$ (краевой) при $x = 1$. Точек перегиба нет; вогнутость вниз.

23. Область определения: $0 < x \leqslant 1$; $\lim\limits_{x \to +0} y = +\infty$, $y(1) = 0$. Точка разрыва $x = 0$. Нуль функции $x = 1$; функция неотрицательная. Функция убывающая; краевой минимум $y = 0$ при $x = 1$. Точка перегиба $(3/4,\ 1/\sqrt{3})$.

24. Функция периодическая с периодом 2π; $y(0) = y(2\pi) = 1$. Точек разрыва нет. Нули функции: $x_1 = 3\pi/4$ и $x_2 = 7\pi/4$. Точки

экстремума: $y_{max}=\sqrt{2}$ при $x=\pi/4$ и $y_{min}=-\sqrt{2}$ при $x=5\pi/4$. Точки перегиба: $(3\pi/4,\ 0)$ и $(7\pi/4,\ 0)$.

25. Область определения: $0 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to+0} y=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Устранимая точка разрыва $x=0$. Нуль функции $x=1$; функция отрицательна при $0 < x < 1$ и положительна при $1 < x < +\infty$. Точка экстремума $y_{min}=-1/e\approx-0{,}37$ при $x=1/e$. Точек перегиба нет; вогнутость вверх.

Указание. С помощью правила Лопиталя доказывается, что при $N\longrightarrow+\infty$ число N растет быстрее своего натурального логарифма, т. е.

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\ln N}{N}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0.$$

26. Область определения: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$. Точек разрыва нет. Нуль функции $x=0$; функция отрицательна при $x<0$ и положительна при $x>0$. Точка экстремума $y_{max}=1/e\approx0{,}37$ при $x=1$. Точка перегиба $(2,\ 2/e^2)$, где $2/e^2\approx0{,}27$.

Указание. Для нахождения предела $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ можно воспользоваться указанием к предыдущему примеру 25. А именно,

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x)}{e^x}=0.$$

27. Область определения: $-\infty < x < +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Функция нечетная. Точек разрыва нет. Нуль функции $x=0$; функция отрицательна при $x<0$ и положительна при $x>0$. Точек экстремума нет; функция возрастающая. Точка перегиба $(0,\ 0)$; вогнутость вверх при $x<0$ и вогнутость вниз при $x>0$.

Глава XII

1. $dy=6x\,dx$. 2. $dy=x\cos x\,dx$. 3. $dy=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$. 4. $dy=-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. $dy=\dfrac{dx}{x}$. 6. $dy=2x\,dx=2(2-t+t^2)(-1+2t)dt$. 7. а) $\Delta y=4$, $dy=2$; б) $\Delta y=0{,}211$, $dy=0{,}2$. 8. 30,301 м³; 30 м³. 9. а) 0,983; б) 0,495; в) 0,795. 10. $\Delta y=0{,}07$. 11. $dy=-2xe^{-x^2}dx$; $d^2y=(4x^2-2)e^{-x^2}dx^2$.

Глава XIII

1. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+x+C$. 2. $x-2\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$. 3. $-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{12}{5\sqrt[6]{x^5}}-\dfrac{3}{2x\sqrt[3]{x}}+C$; 4. $\dfrac{a^{2x}}{\ln a^2}+\dfrac{b^{2x}}{\ln b^2}+\dfrac{2(ab)^x}{\ln ab}+C$. 5. $-\dfrac{\cos 3x}{3}+$

$+\frac{\sin 5x}{5}+C$. 6. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 8. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$. 9. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$. 10. $\arcsin x+$ $+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. 11. $-x+\operatorname{tg} x+C$. 12. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 13. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C$. 14. $-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)-\ln|1-x|+C$. 15. $x-$ $-\operatorname{arctg} x+C$. 16. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x+C$. 17. $x+\ln(1+x^2)+C$. 18. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C$. 19. $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. 20. $\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 10x+C$. 21. $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C$. 22. $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 8x+C$. 23. $\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$. 24. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$. 25. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 26. $x-\ln(1+2e^x)+C$. 27. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(1+x^2)+C$. 28. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. 29. $-x\cos x+\sin x+C$. 30. $(x-1)e^x+C$. 31. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$. 32. $(x^2-2x+2)e^x+C$. 33. $\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+C$. 34. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right|+C$. 35. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. 36. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 37. $\frac{1}{\sqrt{5}}\times$ $\times\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right|+C$. 38. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{x+9}\right|+C$. 39. $\ln\frac{|x+5|^5}{(x+3)^2}+C$. 40. $x-2\ln|x^2+4x+5|+3\operatorname{arctg}(x+2)+C$. 41. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+C$. 42. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4\sqrt{x+1}+C$. 43. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 44. $\ln|x+$ $+\sqrt{x^2-2}|+C$. 45. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$. 46. $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$. 47. $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$. 48. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$. 49. $\frac{1}{8}x-$ $-\frac{1}{32}\sin 4x+C$. 50. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. 51. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+$ $+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. 52. $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)+C$. 53. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 54. $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. 55. $(x^2+3)e^x+C$. 56. $-\frac{x-1}{2}\cos 2x+$ $+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 57. $\frac{1}{13}e^{-2x}(3\sin 3x-2\cos 3x)+C$. 58. $\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\times$ $\times\operatorname{arctg} x+C$. 59. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 60. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

Глава XIV

1. 2. 2. 0,2. 3. 1. 4. 4,5. 5. а) e^{y^2}; б) $-e^{x^2}$. 6. 13/6. 7. а) $-\pi$; б) $-e^{-1}$. 8. а) π; б) $\pi/2$. 10. а) 1; б) $2\pi/3$; в) $2\pi/(3\sqrt{3})$.

Глава XV

1. $\frac{1}{3}$. 2. $a^2\ln 2$. 3. $\frac{4}{3}$. 4. πa^2. 5. 1. 6. $2\frac{2}{3}$. 7. $5\frac{1}{3}$. 8. $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0{,}56$. 9. $21\frac{1}{3}$. 9.1. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 10. $17\frac{1}{3}$. 11. $\frac{1}{4}(e^2+1)\approx$ $\approx 2{,}10$. 11.1. $8a$. 12. a^2. 13. $\frac{\pi a^2}{4}$. 14. $\frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$. 15. $8a$. 16. $\frac{h}{6}[AB+ab+(A+a)(B+b)]$. 17. $4\pi R^3/3$. 18. $16\pi/15$. 19. $\pi^2/2$. 20. 2π. 21. $64\pi/15$. 22. $\pi a^2h/2$. 23. 2π. 24. 25 м; 2,5 м/с. 25. 25 Дж. 26. $2q_0l/\pi$. 27. $\approx 17\,400$ Дж. 28. $2a^3/3$.

Глава XVI

1. $z=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. 2. а) Вертикальная полоса; б) полуплоскость; в) угол; г) внутренность единичного круга. 3. Отображенная область есть криволинейный треугольник, ограниченный кривыми: $v^2=4(1-u)$, $v^2=4(1+u)$, $v=0$ $(w=u+iv)$.

Глава XVII

1. а) 1; б) 1. 2. $x=280$; $y=-310$. 3. 1) $x=t$, $y=1-t$ $(-\infty< t<+\infty)$ при $\alpha=2$; 2) решений нет при $\alpha\neq 2$. 4. $x=(5-3\alpha)/(25+\alpha)$, $y=16/(25+\alpha)$, если $\alpha\neq-25$; при $\alpha=-25$ прямые параллельны. 5. $x=39t$, $y=23t$, $z=6t$ $(-\infty<t<+\infty)$; $x=39$, $y=23$, $z=6$ при $t=1$. 6. а) 0; б) 12; в) $2x^3$. 7. $x_1=-1$, $x_2=2$. 8. $D=84$, $D_x=14$, $D_y=-84$, $D_z=70$; $x=1/6$, $y=-1$, $z=5/6$. 9. $x=17t$, $y=2t$, $z=-7t$ $(-\infty<t<+\infty)$. 10. $x=0$, $y=0$, $z=0$ при $\alpha\neq 0$; $x=t$, $y=-t$, $z=-t$ $(-\infty<t<+\infty)$ при $\alpha=0$. 11. $x_1=55/127\approx 0{,}4331$, $x_2=-248/127\approx-1{,}9528$, $x_3=-183/127\approx-1{,}4403$, $x_4=-70/127\approx$ $\approx-0{,}5512$.

Глава XVIII

1. $a=2$; $\alpha=\pi/3$, $\beta=2\pi/3$, $\gamma=\pi/4$. 2. $F=10$; $\alpha=\pi/2$, $\beta=0$, $\gamma=\pi/2$. 3. $3/\sqrt{2}$. 4. 20. 5. $S=8\sqrt{3}$; $\cos\varphi=1/7$, $\sin\varphi=\frac{4}{7}\sqrt{3}$. 6. Некомпланарны.

Глава XIX

1. Совокупность координатных плоскостей Oyz и Oxz; б) совокупность координатной плоскости Oxy и биссекторной плоскости двугранного угла между координатными плоскостями Oxz и Oyz; в) пара параллельных плоскостей $y=-2$ и $y=1$; г) параболический цилиндр; д) прямая, параллельная оси Ox; е) координатная плоскость Oyz; ж) ось Oz; з) точка $O(0, 0, 0)$. 2. $p=4$; $\alpha=60°$, $\beta=120°$, $\gamma=45°$. 3. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. 4. $z=3$. 5. $\approx 1{,}31$. 6. 60°, 120°, 135°.

7. (0, —1/2, 0); (—1/3; 0, —2/3); (0, —1/2, 0). 8. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$. 9. $x=R\cos\alpha\cos\varphi$, $y=R\cos\alpha\sin\varphi$, $z=R\sin\alpha$. 10. $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=2/\sqrt{3}$. 11. $3\sqrt{3/2}$, $\sqrt{3}$. 12. $\frac{x-a\cos t_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-a\sin t_0}{a\cos t_0}=\frac{z-bt_0}{b}$; $\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x^2+y^2=a^2$, $x=a\cos\frac{z}{b}$; $y=a\sin\frac{z}{b}$.

Глава XX

1. а) Полоса $|y|\leqslant 1$; б) внешность круга $x^2+y^2\geqslant 1$; в) полуплоскость $x+y>0$. 2. а) Параллельные прямые; б) прямые, проходящие через начало координат, исключая это начало; в) гиперболы, оси которых совпадают с координатными осями Ox и Oy; г) параболы с общей осью Oy. 3. а) Параллельные плоскости; б) круговые цилиндры с общей осью Ox. 4. а) $du=2[(x-y)\,dx-(x+y)\,dy]$; б) $du=\frac{y\,(y\,dx-x\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; в) $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{2\,|y|\sqrt{xy}}$. 5. $\frac{\partial u}{\partial l}=2\cos\alpha-\sin\alpha$; 2; $1/\sqrt{2}$; -1; $-3/\sqrt{2}$; -2; $-1/\sqrt{2}$; 1; $3/\sqrt{2}$; 2; $|\operatorname{grad} u\,(M_0)|=\sqrt{5}$. 6. $|\operatorname{grad} u\,(A)|\approx 50{,}5$ °С/км. 7. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1+\sin^2 x}{4\sqrt{\sin^3 x}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{6xy}{z^4}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{2y}{z^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{2x}{z^3}$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\,(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$. 9. 2,48 кг/м³ ± 0,26 кг/м³. 11. $x=y=z=\sqrt[3]{a}$. 12. Измерения параллелепипеда $2a/\sqrt{3}$, $2a/\sqrt{3}$, $a/\sqrt{3}$. 13. Измерения параллелепипеда $2r\sqrt{2}/3$, $2r\sqrt{2}/3$, $h/3$. 14. $y=198{,}77-5{,}06x$. 15. $x^2\approx 6x-\frac{26}{3}$. 16. $\min u=0=u\,(-0{,}6;\ -0{,}8)$; $\max u=10=u\,(0{,}6;\ 0{,}8)$.

Глава XXI

1. Расх. 2. Расх. 3. Сход. 4. Сход. 5. Расх. 6. Сход. 7. Сход. 8. Сход. 9. Расх. 10. Сход. 11. Сход. 12. Сход. 13. Сход. 14. Сход. 15. Расх. 16. Сход. 17. $-1<x\leqslant 1$. 18. $-\infty<x<+\infty$. 19. $x=0$. 20. $-1\leqslant x<3$. 21. $a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. 22. $\sin^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. 23. $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2\cdot 4}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(x-1)^3+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$. 24. $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. 25. Указание. $\cos^2 x=$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $\cos^2 x = 1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$. 26. $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots$ $(-1<x<1)$. 27. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$ $(-1<x<1)$. 28. а) 1,649; б) 0,309; в) 1,037. 29. 0,5450. 30. $f(x)\approx x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{72}$. 31. а) $\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$ $(-\pi<x<\pi)$; б) $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

Глава XXII

3. $y=\frac{3}{4}x^2$. 4. а) $x^2+y^2=C$; б) $xy=C$; в) $y=C+\ln x$; г) $y=-2+Ce^x$; д) $y=-\ln(C-e^x)$. 5. а) $y^2=2x^2\ln Cx$; б) $y=xe^{1+Cx}$. 6. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. 7. а) $y=\frac{x^3}{2}+Cx$; б) $x=Ce^y-(y^2+2y+2)$. 8. $y=\sin x$. 9. $x^2+y^2=C$. 10. $y=e^{(x-2)/4}$. 11. $Q_t=Q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$. 12. 100 г. 13. $y(2)=1{,}122$; точное значение $y(2)=1+e^{-2}=1{,}135$. 14. $y=C_1+C_2x-\sin x$. 15. $y=C_1\sin(x+C_2)$. 16. $y=C_1+\frac{(x+C_2)^2}{4C_1}$. 17. $y=1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}$. 18. а) $y=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3+\ldots$; б) $y=x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7+\ldots$ 19. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 20. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 21. $y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 22. $y=e^{x/2}(C_1+C_2x)$. 23. $y=2\cos x-\sin x$. 24. $y=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{-x}$. 25. $y=\frac{1}{3}\sin x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. 26. $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{19}{108}+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. 27. $y=1+x-e^x\cos x$. 28. $x=C_1e^{-pt/2}\cos\left(t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}+C_2\right)$, где $q=k_1/m$, $p=k_2/m$ и k_1, k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Глава XXIII

1. а) $3\sqrt{5}/2$; б) $(2\sqrt{2}-1)/3$; в) $\pi R^2/4$; г) $a[(\pi+4)\sqrt{2}-8]$. 2. $3\frac{1}{3}$. 3. πR. 4. $x_0=0$, $y_0=\frac{2}{\pi}R$. 5. $\frac{2^7}{3^6}\cdot\frac{848}{105}\approx 1{,}42$. 6. $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 7. а) 16/15; б) 2π; в) 2π. 8. $-9/2$. 9. а) -2; б) 0; в) 3/2; г) e^2-1. 10. $-2\pi ab$. 11. $A=\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. 12. $-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 13. $\ln\frac{b}{a}$. 14. $31\frac{1}{2}$.

Глава XXIV

1. а) 3/20; б) $(1-e^{-1})^2$; в) $\pi/2$. **2.** а) $4(2\sqrt{2}-1)/15$; б) 2/5; в) 2π. **3.** а) $\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y)\,dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 f(x, y)\,dx$; б) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y)\,dx$; в) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$; г) $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y)\,dy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$;

д) $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_{-1}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$.

4. а) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$; б) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)\,dy$; в) $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\,dx$.

5. а) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi \cos^2\varphi\,dr$; б) $\int_{-\operatorname{arctg} 0{,}5}^{\operatorname{arctg} 0{,}5} d\varphi \int_0^{2\sec\varphi} r^3\,dr$;

в) $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} r f[r(\cos\varphi + \sin\varphi)]\,dr$. **6.** а) 1/3; б) 4/21; в) $2-\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$; г) 16/5. **7.** а) $2\pi^2$; б) $\pi/4$. **8.** а) 1/3; б) $(3\pi-4)/6$; в) 88/105; г) 32/9; д) $2abc/3$. **9.** $I_x = I_y = \frac{\pi}{4}R^4$. **10.** $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{3}{5}a$. **11.** 1/48. **12.** 28/3.

Глава XXV

1. $A+A=A$, $AA=A$, $A+C=A$, $AC=A$. **2.** $P(A)=1/6$; $P(B)=1/2$; $P(C)=2/3$. **3.** $\geqslant 790$. **4.** а) 3/7; б) 1/2. **5.** а) 80 %; б) ≈ 97 %. **6.** а) 0,992; б) 0,876; в) 0,008. **8.** $P_0=32/243$; $P_1=80/243$; $P_2=80/243$; $P_3=40/243$; $P_4=10/243$; $P_5=1/243$. **9.** $\geqslant 31$. **10.** $M=1{,}31$; $D=0{,}0049$; $\sigma=0{,}07$. **12.** $\Phi(x)=0$ при $-\infty < x < 0$; $\Phi(x)=\frac{1}{4}x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$; $\Phi(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$; $\Phi(x)=1$ при $2 < x < +\infty$; $M(X)=1\frac{1}{4}$; $D(X)=\frac{13}{48}$. **13.** $\varphi(x)=\frac{1}{2l}$; $M(X)=0$; $D(X)=\frac{1}{3}l^2$; $\sigma(X)=\frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58l$. **15.** $\approx 0{,}384$. **16.** Число стандартных пакетов должно быть примерно 9540.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

V. A. Kudryavtsev, B. P. Demidovich

A BRIEF COURSE OF HIGHER MATHEMATICS

Moscow, Nauka, Main Editorial Board for
Physical and Mathematical Literature, 1989

Readership: This textbook was written for university students majoring in various fields of natural sciences. The book is intended for two-semester course in higher mathematics.

From the book's review: «...Presentation of the material is clear, precise and intelligible to broad student's circle. Abudance of model examples and resolved problems helps to learn actively the theoretical material...».

Professor Lev KUDRYAVTSEV, a corresponding Member of the USSR Academy of Sciences

Summary: The textbook discusses analitical geometry, mathematical analysis, differential equations, probability theory, elements of linear algebra and linear programming. The aim of the book is to set forth the essentials of higher mathematics and their applications in various fields.

Contents: The Rectangular Coordinate System in the Plane and its Application to the Simple Problems. The Equation of a Line. The Straight Line. Second-Order Lines. Polar Coordinates. Parametric Equations of a Line. Functions. The Theory of Limits. Continuity of Functions. The Derivative of a Function. Basic Derivative Theorems. Applications of a Derivative. Differential. The Indefinite Integral. The Definite Integral. Applications of the Definite Integral. Complex Numbers. Determinants of the Second and Third Order. Fundamentals of Vector Algebra. Fundamentals of Solid Analytic Geometry. Functions of Several Variables. Series. Differential Equations. Line Integrals. Double and Triple Integrals. Fundamentals of the Probability Theory. The Concept of Linear Programming. Most Important Constants. List of Formulas: Classified and Explained.

Authors: Boris Demidovich (1906—1977), a professor of the Moscow State University, was an eminent specialist in mathematical analysis and differential equations. He is well known for his textbooks for university students, and in particular, for his Collection of problems in mathematical analysis and for his Lectures in mathematical theory of stability, which are widely used in the Soviet Union and has been translated into several foreign languages. Professor of the Moscow State University Vsevolod Kudryavtsev (1885—1953) was a specialist in applied mathematics.

1 руб. 40 коп.